

**Problemas de Contato Unilateral em Placas  
Semi-Espessas, Sujeitas a Grandes Deflexões,  
Utilizando uma Teoria de Ordem Superior**

# Dissertação

Eng. Jackson Luís Barp, M.Sc.

1996

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Problemas de Contato Unilateral em Placas  
Semi-Espessas, Sujeitas a Grandes Deflexões,  
Utilizando uma Teoria de Ordem Superior

Dissertação Submetida à Universidade Federal de  
Santa Catarina para Obtenção do  
Grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Jackson Luís Barp

Florianópolis, Julho de 1996.

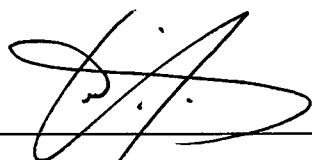
**Problemas de Contato Unilateral em Placas Semi-Espessas, Sujeitas  
a Grandes Deflexões, Utilizando uma Teoria de Ordem Superior**

**Jackson Luís Barp**

Esta Dissertação foi Julgada Adequada para a Obtenção do Título de


**Mestre em Engenharia**

Especialidade Engenharia Mecânica, Área de Concentração Projeto e  
Análise de Componentes Mecânicos, e Aprovada em sua Forma Final  
pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica



Carlos Alberto de Campos Selke, Ph.D.

Orientador



Abelardo Alves de Queiroz, Ph.D.

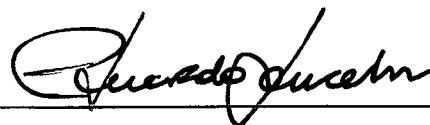
Coordenador da Pós-Graduação

Banca Examinadora



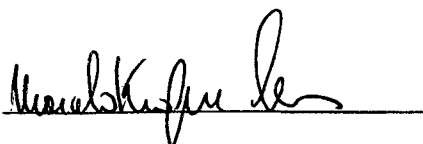
Nelson Back, Ph.D.

Presidente



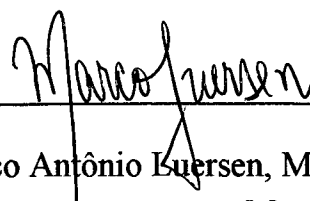
Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.

Membro



Marcelo Kranjc Alves, Ph.D.

Membro



Marco Antônio Luersen, M.Sc.

Membro

# DEDICATÓRIA

À minha Mãe SELENE

À minha Esposa ESTELA

À meu Filho JACKSON JÚNIOR

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS por ter dado-me forças para concluir este mestrado, mesmo com todas dificuldades que apareceram nestes três anos de trabalho.

Agradeço minha família por todo apoio dado durante o tempo que estivemos separados, encorajando-me a aceitar novos desafios e a perseverar para superá-los.

A meu Amigo e Orientador Carlos Alberto de Campos Selke agradeço por ter confiado em meu trabalho e por ter conduzido-me até o final deste mestrado mesmo com todas as dificuldades que apareceram no decorrer destes três anos.

A meu Amigo e Irmão Cláudio (Queridão) agradeço pelos dois anos de convívio e aprendizado diário, pelas intermináveis discussões nas madrugadas, pelas palavras de apoio quando a vontade era abandonar tudo e peço desculpas pelas vezes que eu não soube reconhecer tudo isto.

A meu grande Amigo Foggiano agradeço por ter me auxiliado nos momentos difíceis pelos quais eu passei, pelas noites de GRANTE, pelos cafés nas madrugadas e pelo auxílio técnico dado durante o desenvolvimento do trabalho.

Agradeço ainda a todas as pessoas que se envolveram direta ou indiretamente na execução deste trabalho. Dentre as quais gostaria de destacar Prof. Barcellos, Prof. Blass, Prof. Domingos, André Ogliari (Meu Prof. de Graduação), Tancredo, Lauro Nicolazzi, Jucélio, Rato, Prof. Fancello, Prof. Marcelo, Marco Luersen (Co-Orientador), Rodrigo Postal, Miltinho, Mauro Maionese, Richard e Rosa (Por me receberem com tanto carinho) ..... me desculpem se esqueci de alguém.

Finalmente, um agradecimento muito especial para minha mulher Estela por estar sempre ao meu lado me apoiando e motivando quando o desânimo batia, por ter digitado e revisado partes desta dissertação e por ter me dado um filho maravilhoso Jackson Júnior que tem sido minha constante fonte de inspiração.

# ÍNDICE

	Página
DEDICATÓRIA.....	v
AGRADECIMENTOS.....	vi
LISTA DE FIGURAS.....	x
LISTA DE TABELAS.....	xiii
LISTA DE APÊNDICES.....	xiv
RESUMO.....	xv
ABSTRACT.....	xvi
 CAPÍTULO 1 Introdução.....	 1
1.1. Comentários Introdutórios.....	1
1.2. Descrição do Escopo do Trabalho.....	2
1.3. Revisão Bibliográfica.....	4
 CAPÍTULO 2 Formulação do Problema de Contato Unilateral em Mecânica dos	
Sólidos.....	9
2.1. Introdução.....	9
2.2. Fundamentos de Elasticidade Finita.....	9
2.2.1. Definições.....	11
2.2.2. Gradientes de deformação.....	13
2.2.3. Definições de deformação.....	14
2.2.4. Definições de tensões.....	18
2.2.5. Princípios do trabalhos virtuais.....	20

2.3. Condições Cinemáticas de Contato.....	26
2.3.1. Forma incremental e linearizada da condição de contato.....	27
2.3.2. Forma incremental das tensões de contato.....	31
2.3.3. Formulação da desigualdade variacional.....	32
2.4. Solução da Desigualdade Variacional.....	35
2.4.1. Método de penalidade.....	37
2.4.2. Aplicação ao princípio dos trabalhos virtuais.....	41
2.5. Formulação Lagrangiana Atualizada.....	43

### CAPÍTULO 3 Formulação do Elemento Finito de Placa de Lo, Christensen e Wu,

Sujeito à Grandes Deslocamentos e Contato Unilateral.....	45
3.1. Introdução.....	45
3.2. Descrições Cinemáticas para Placas.....	46
3.2.1. Teoria clássica para placas finas.....	47
3.2.2. Teoria de primeira ordem para placas semi-espessas.....	50
3.2.3. Teoria de ordem superior para placas semi-espessas.....	52
3.2.3.1. Teoria de Lo, Christensen e Wu.....	53
3.2.3.2. Teoria de Reddy.....	55
3.2.3.3. Teoria de Kant.....	56
3.3. Justificativa para Utilização de uma Teoria de Placa de Ordem Superior.....	57
3.4. Relações Incrementais Deformação-Deslocamento.....	62
3.5. Relações Constitutivas Incrementais.....	64
3.6. Forma Incremental do Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	66
3.7. Matriz de Rigidez e Vetor Carga do Elemento Finito.....	69
3.8. Condições Incrementais de Contato para o elemento de Placa de Lo, Christensen e Wu.....	76



3.9. Comentários sobre Implementação Numérica.....	79
3.9.1. Processos de vetorização e notação indicial.....	79
3.9.2. Algoritmo para solução de equações não-lineares.....	81
3.9.3. Integração numérica e fator de penalidade.....	83
 CAPÍTULO 4 Resultados e Análises Numéricas.....	86
4.1. Introdução.....	86
4.2. Comentários Preliminares.....	87
4.2.1. Condições de contorno.....	88
4.3. Exemplos Numéricos para Problemas Lineares.....	90
4.4. Exemplos Numéricos para Problemas Geometricamente Não-Lineares.....	93
4.4.1. Análise não-linear de uma placa quadrada.....	94
4.4.2. Análise não-linear de uma placa circular.....	99
4.5. Exemplos Numéricos para Problemas Contato Unilateral.....	104
4.5.1. Problemas submetidos a pequenos deslocamentos.....	105
4.5.1.1. Análise contato unilateral de uma viga.....	105
4.5.1.2. Análise contato unilateral de uma placa circular.....	111
4.5.2. Problemas submetidos a grandes deslocamentos.....	115
4.5.2.1. Análise contato unilateral de uma viga.....	116
4.5.2.2. Análise contato unilateral de uma placa retangular.....	118
 CAPÍTULO 5 Conclusão.....	122
5.1. Comentários Finais.....	122
5.2. Sugestões para Futuros Desenvolvimento.....	123
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	126

# LISTA DE FIGURAS

	Página
FIGURA 2.1 Trajetória do movimento incremental de um corpo elástico $\Omega$ .....	12
FIGURA 2.2 Corpo elástico próximo a uma superfície rígida, sujeito à restrições de contato unilateral.....	21
FIGURA 2.3 Corpo elástico sujeito à restrições de contato unilateral, submetido a um processo incremental de deformação.....	24
FIGURA 2.4 Condição de impenetrabilidade.....	29
FIGURA 2.5 Funcional penalidade e sua derivada.....	40
FIGURA 3.1 Sistemas de coordenadas da estrutura tipo placa.....	47
FIGURA 3.2 Cinemática da teoria clássica para placas.....	49
FIGURA 3.3 Cinemática da teoria de primeira ordem para placas.....	51
FIGURA 3.4 Conjunto das componentes do deslocamento.....	54
FIGURA 3.5a Representação do campo de deslocamento para placas.....	60
FIGURA 3.5b Representação da deformação cisalhante transversal para placas.....	61
FIGURA 3.6a Tensões resultantes de membrana e cisalhamento.....	68
FIGURA 3.6b Momentos resultantes de flexão e tensões resultantes de cisalhamento.....	69
FIGURA 3.7 Sistema de coordenadas do elemento isoparamétrico mestre de 9 nós.....	72
FIGURA 3.8 Partições nodais da matriz de rigidez do elemento.....	80
FIGURA 3.9 Algoritmo iterativo de Newton-Raphson.....	83

FIGURA 4.1	Placa quadrada engastada (a) e simplesmente suportada (b) sujeita a um carregamento uniformemente distribuído (um quadrante modelado com 4 elementos).....	91
FIGURA 4.2	(a) Placa quadrada engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído - a região hachurada representa o quadrante discretizado. (b) Discretização de um quadrante da placa com 1, 4 e 16 elementos finitos....	95
FIGURA 4.3	Análise da convergência -h do deslocamento central com carga total...	97
FIGURA 4.4	Deslocamento central de uma placa quadrada engastada.....	98
FIGURA 4.5	(a) Placa circular engastada sujeita a um carregamento concentrado central - a região hachurada representa o quadrante discretizado. (b) Discretização de um quadrante da placa com 1, 3 e 12 elementos finitos...	100
FIGURA 4.6	Análise da convergência -h do deslocamento central com carga total.	102
FIGURA 4.7	Deslocamento central de uma placa circular engastada.....	103
FIGURA 4.8	(a) Viga simplesmente suportada sujeita a momentos concentrados nas extremidades - a região hachurada representa a metade discretizada. (b) Discretização da metade da viga com 16 elementos finitos.....	106
FIGURA 4.9	Deslocamento central de uma viga simplesmente suportada.....	108
FIGURA 4.10	Distribuições de pressões ao longo da viga para o programa FOST e para o programa HOST.....	109
FIGURA 4.11	Distribuições de pressões ao longo da viga segundo Naghdi e Rubin (1989), página 253, figura 3.....	111
FIGURA 4.12	(a) Placa circular simplesmente suportada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e a um momento concentrado na borda - a região hachurada representa o quadrante discretizado. (b) Discretização de um quadrante da placa com 64 elementos finitos.....	112
FIGURA 4.13	Deslocamentos transversais ao longo do raio referentes a placa circular situada sobre uma superfície rígida.....	114

FIGURA 4.14 (a) Viga simplesmente suportada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído - a região hachurada representa a metade discretizada. (b) Discretização da metade da viga com 4, 8 e 10 elementos finitos.....	117
FIGURA 4.15 Deslocamentos transversais da flexão de um viga simplesmente suportada contra uma superfície rígida.....	118
FIGURA 4.16 Placa quadrada engastada (a) e simplesmente suportada (b) sujeita a um carregamento uniformemente distribuído (um quadrante modelado com 16 e 25 elementos).....	119
FIGURA 4.17 Deslocamentos transversais da flexão de uma placa engastada contra uma superfície rígida.....	120
FIGURA 4.18 Deslocamentos transversais da flexão de uma placa simplesmente suportada contra uma superfície rígida.....	121

# LISTA DE TABELAS

	Página
TABELA 3.1 Campo de deslocamentos para diferentes teorias de placas.....	58
TABELA 4.1 Deslocamento central de uma placa quadrada simplesmente suportada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.....	91
TABELA 4.2 Deslocamento central de uma placa quadrada engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.....	92
TABELA 4.3 Deslocamento central de uma placa quadrada engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.....	96
TABELA 4.4 Deslocamento central de uma placa circular engastada sujeita a um carregamento concentrado central.....	101
TABELA 4.5 Deslocamento central de uma viga simplesmente suportada sujeita a um momento concentrado nas extremidades.....	107

# LISTA DE APÊNDICES

	Página
APÊNDICE A Componentes da matriz de rigidez e do vetor carga para um elemento finito de placa utilizando a teoria de Lo, Christensen e Wu.....	135

## RESUMO

Neste Trabalho é apresentada uma formulação incremental de elementos finitos para problemas de contato em placas, submetidas a grandes deslocamentos e com restrições unilaterais. Na formulação do problema de contato unilateral, desconsidera-se o efeito do atrito, permitindo a obtenção de uma desigualdade variacional. Para resolver numericamente esta desigualdade variacional utiliza-se o método da penalidade, no qual as condições de contato unilateral são aproximadas utilizando um fator de penalidade. Utilizando esta formulação é desenvolvido um elemento finito isoparamétrico Lagrangiano de nove nós, baseado na teoria de ordem superior de Lo, Christensen e Wu para placas. O elemento finito de placa obtido foi utilizado para resolver alguns problemas estruturais lineares e não-lineares, tais como flexão de vigas, placas retangulares e circulares submetidas a pequenos e grandes deslocamentos. Inicialmente sem restrições unilaterais, e posteriormente sujeitas a restrições unilaterais, tais como fundações rígidas. Os resultados numéricos obtidos são comparados com os resultados e soluções disponíveis na literatura.

# ABSTRACT

An incremental finite element formulation for contact problems of plates, undergoing large deflections with unilateral constraints, is presented in this work. When modelling unilateral contact problems, without taking into account the friction, a variational inequality is obtained. To solve numerically this variational inequality, one can use the penalty method, in which the contact conditions are approximated using a penalty factor. An isoparametric Lagrangian nine node finite element, based on the Lo, Christensen and Wu higher order theory of plates, is obtained using this formulation. This plate finite element is used to solve some linear and nonlinear structural problems, such as bending problems of beams, rectangular and circular plates undergoing small and large deflections, first without unilateral constraints and later considering unilateral constraints, such as rigid foundations. The obtained numerical results are compared with solutions and results available in the literature.



# CAPÍTULO 1

## Introdução

### 1.1. Comentários Introdutórios

Nesta dissertação é apresentada uma formulação para o problema que envolve, talvez, a mais primitiva e intrínseca característica da mecânica dos sólidos, i. e., o problema de contato entre corpos. Esta classe de problemas inclui aqueles modelados por Signorini em elasto-estática (SIGNORINI, 1933), onde se estuda o comportamento de um corpo linearmente elástico em contato unilateral com uma fundação rígida sem atrito.

Na modelagem do problema de contato são considerados os inconvenientes gerados pela condição unilateral de contato, assim chamada por restringir os deslocamentos sobre o contorno somente em um sentido, através do princípio de impenetrabilidade entre os corpos; ainda o fato do problema de contato ser um fenômeno inteiramente não-linear e também o fato da estrutura estar submetida a grandes deslocamentos. Tais inconvenientes produzem dificuldades na resolução do problema de contato. Esta classe particular de problema pode ser adequadamente estudada utilizando-se a teoria das desigualdades variacionais, a qual possui uma forte e bem definida estrutura matemática e oferece ferramentas adequadas para modelagem e análise deste tipo de problema (DUVAUT e LIONS, 1976).

Com base nesta formulação é obtido um elemento finito utilizando-se a versão Lagrangiana atualizada incremental do princípio dos trabalhos virtuais. Esta formulação será inicialmente desenvolvida para problemas genéricos de mecânica dos

sólidos com restrições unilaterais e posteriormente particularizado para o estudo de placas semi-espessas.

Posteriormente, esta formulação incremental do elemento finito é particularizada utilizando uma teoria de ordem superior para placas, i.e., a teoria de Lo, Christensen e Wu (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a, 1977b), a qual leva em consideração os efeitos da deformação cisalhante transversal, da deformação normal transversal e o empenamento da seção transversal. A motivação para utilizar esta complexa teoria tem como objetivo principal eliminar as inconsistências físicas que surgem com a utilização de teorias de ordem inferior, bem como aquelas geradas pela imposição das condições de contato unilaterais. Para resolver a desigualdade variacional, característica do problema de contato unilateral, utilizar-se-á o método da penalidade.

O elemento finito isoparamétrico Lagrangiano de nove nós, obtido com a formulação acima citada, será utilizado para análise numérica de problemas de flexão de placas, submetidas a pequenos ou grandes deslocamentos e sujeitas, ou não, à condições de contato unilateral, sem atrito. Os resultados obtidos são analisados e comparados com aqueles disponíveis na bibliografia.

A seguir, neste capítulo será apresentada uma breve descrição do escopo do trabalho e uma breve revisão bibliográfica situando o trabalho desenvolvido no contexto dos desenvolvimentos realizados na área.

## 1.2. Descrição do Escopo do Trabalho

Nesta seção, são apresentados os assuntos a serem discutidos em cada um dos capítulos desta dissertação. No Capítulo 1, são apresentados alguns comentários introdutórios, bem como uma revisão bibliográfica acerca do tema que é desenvolvido

nesta dissertação, com objetivo de mostrar sua importância no contexto das pesquisas na área de interesse.

No Capítulo 2, são revisados alguns conceitos básicos sobre elasticidade finita, necessários para a formulação do problema estudado. A partir desta revisão, uma formulação Lagrangiana atualizada para o problema de contato, é obtida com base na forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais. Também, as respectivas condições de contato incrementais são obtidas e introduzidas na versão Lagrangiana atualizada do princípio dos trabalhos virtuais, resultando em uma desigualdade variacional, a qual será resolvida através do método da penalidade.

No Capítulo 3, após uma breve análise de algumas teorias de placa existentes, é utilizada a teoria de ordem superior de Lo, Christensen e Wu para particularizar a forma Lagrangiana atualizada incremental do princípio dos trabalhos virtuais, incluindo-se as condições de contato linearizadas. Posteriormente, as equações resultantes são discretizadas, via método de elementos finitos, obtendo-se um elemento finito isoparamétrico Lagrangiano de nove nós. São discutidos também alguns aspectos sobre o algoritmo e sobre a solução numérica.

No Capítulo 4, são apresentados inicialmente alguns comentários sobre os programas de computador desenvolvidos em FORTRAN e as condições de contorno a serem utilizadas. Na sequência, será validada a formulação do elemento finito através da análise e discussão de vários problemas de placas e vigas, submetidas a pequenos ou grandes deslocamentos e ainda sujeitos, ou não, a restrições de contato unilaterais. Os resultados obtidos são comparados com aqueles da literatura disponível.

Finalmente, no Capítulo 5, serão apresentadas as conclusões que foram obtidas ao longo do trabalho e uma relação de sugestões para dar continuidade ao trabalho desenvolvido nesta linha de pesquisa.

### 1.3. Revisão Bibliográfica

Nesta seção é apresentada uma revisão bibliográfica dos trabalhos sobre problemas de placas submetidas a grandes deslocamentos, com restrições de contato unilaterais. Esta revisão tem como objetivo facilitar o entendimento de algumas escolhas adotadas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Um dos trabalhos pioneiros no estudo de flexão de placas circulares sujeitas a restrição unilateral de uma fundação rígida horizontal, paralela à superfície média da placa indeformada, utilizando a teoria clássica de placas, foi o trabalho de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), a qual é, frequentemente, utilizado para análise da placa base de reservatórios de líquidos. A teoria clássica de placas, discutida com detalhes no Capítulo 3 - Seção 3.2.1., é formulada com base na hipótese de Kirchhoff, o qual preconiza que as normais à superfície média indeformada, permanecem normais à superfície média deformada, sendo também inextensíveis. Esta teoria clássica possui boa performance para placas finas. Por outro lado, o trabalho de Duvaut e Lions (1976), considerado um dos trabalhos pioneiros sobre o estudo de flexão de placas submetidas a grandes deslocamentos e sujeitas a restrições de contato unilateral, foi realizado utilizando a teoria de von Kármán para placas, a qual também é baseada na hipótese de Kirchhoff. A teoria de von Kármán para placas possui considerável precisão para análise de placas finas.

Como tem sido amplamente discutido por inúmeros autores (ESSENBURG, 1975; LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a; NAGHDI e RUBIN, 1989), a aplicação da teoria clássica de placas para a solução de problemas de contato apresenta algumas inconsistências físicas inerentes ao problema, tais como as descontinuidades das tensões resultantes cisalhantes no contorno da região de contato. E, desta forma, torna-se impossível calcular corretamente a força transmitida pela restrição à placa.

Além disto, na solução dos problemas de flexão de placas laminadas compostas, o uso da teoria clássica também acarreta o aparecimento de similares inconsistências físicas, impossibilitando a previsão das tensões de deslocamento entre as lâminas, empenamento da seção transversal, etc... Noor e Burton (1989) apresentam uma excelente revisão, com mais de 200 referências, sobre teorias para placas laminadas compostas.

Numa tentativa de eliminar as inconsistências físicas devido ao contato, Essenburg (1962) inicialmente utilizou uma teoria de placas que incluía o efeito da deformação cisalhante transversal, i.e., a teoria obtida por Reissner (1945, 1947) e por Mindlin (1951), também conhecida como teoria de Mindlin-Reissner. Porém, algumas limitações ainda permaneceram sem solução como, por exemplo, a impossibilidade de calcular corretamente os esforços na periferia da região de contato e a incapacidade de prever corretamente as regiões de separação com o aumento do carregamento (ESSENBURG, 1975; NAGHDI e RUBIN, 1989). Ainda interessado em superar as dificuldades de resolver problemas de contato e na tentativa de remover as inconsistências acima citadas, Essenburg (1975) apresentou uma teoria de ordem superior para vigas, onde levou em consideração os efeitos da deformação normal transversal, juntamente com os efeitos da deformação cisalhante transversal. Para o problema de viga o uso deste tipo de teoria possibilitou a correta determinação da região de separação (ESSENBURG, 1975; NAGHDI e RUBIN, 1989). Já para o caso de placas, uma teoria incluindo os efeitos das deformações cisalhante e normal transversais foi proposta por Reissner (1975, 1981).

Os constantes avanços no campo dos materiais compostos laminados e reforçados atraíram a atenção de inúmeros pesquisadores como Whitney e Sun (1973, 1974) e Nelson e Lorch (1974), os quais procuraram elaborar teorias cada vez mais complexas para placas, que sejam capazes de representar da melhor forma possível o comportamento do membro estrutural sob análise. Contudo, muitas destas teorias apresentam ainda uma inconsistência fundamental em seu desenvolvimento, i.e.,

quando as tensões resultantes de cisalhamento são calculadas é utilizado um fator de correção. Este fator é idêntico aquele utilizado na formulação da teoria de primeira ordem, quando assume-se que as tensões cisalhantes são uniformes na espessura, não sendo desta forma adequado para ser utilizado em teorias de ordem superior, uma vez que estas assumem um campo de deslocamentos que resulta em uma distribuição não uniforme das tensões cisalhantes na espessura da placa.

Devido ao crescente uso de materiais compostos laminados e reforçados na indústria, também o efeito do empenamento da seção transversal como resultado da deformação cisalhante transversal tem-se tornado de considerável interesse e Lo, Christensen e Wu (1977a, 1977b, 1978) apresentaram uma teoria de ordem superior onde os deslocamentos axiais possuem expansões cúbicas e o deslocamento transversal possui expansão quadrática, ambos com relação à coordenada da espessura. Esta teoria apresenta um número suficiente de termos em seu campo de deslocamentos para representar os efeitos da deformação cisalhante transversal, da deformação normal transversal e do empenamento da seção transversal. Normalmente, o grande número de variáveis no sistema de equações e a necessidade de utilizar as equações de equilíbrio tridimensionais para obter valores precisos para as tensões cisalhante e normal transversais, são citadas como desvantagens para a utilização desta teoria. Surge neste ponto a questão da necessidade prática de uma teoria tão complexa. Pode-se justificar a sua utilização pela necessidade de um alto grau de precisão, desejado para solução de determinados problemas, especialmente os problemas de contato de placas compostas e reforçadas, as quais encontram aplicação na indústria aeroespacial, na indústria petrolífera, entre outras.

A solução numérica do problema de contato unilateral na mecânica dos sólidos, incluindo, ou não, os efeitos do atrito, tem sido constantemente desenvolvida. Para tal, tem-se utilizado os princípios variacionais onde, com o objetivo de satisfazer as condições de contato unilaterais, é apresentada uma desigualdade variacional definida sobre um conjunto de deslocamentos admissíveis. A formulação de tais problemas,

utilizando o conceito de desigualdades variacionais, foi originalmente apresentada no clássico trabalho de Duvaut e Lions (1976). Estas desigualdades variacionais podem ser resolvidas pela utilização de técnicas de programação matemática não-linear ou ainda ser transformadas em uma sequência de igualdades variacionais, através da regularização das restrições de contato, tornando-as apropriadas para a solução utilizando o método dos elementos finitos. Para a imposição destas restrições utiliza-se o método da penalidade (OHTAKE, ODEN e KIKUCHI, 1980a, 1980b). O mesmo método da penalidade, juntamente com o método de regularidade, quando o atrito for considerado (CAMPOS, ODEN, e KIKUCHI, 1982), o método dos multiplicadores de Lagrange (KIKUCHI e ODEN, 1988), o método Lagrangiano perturbado (SIMO, WRIGGERS e TAYLOR, 1985) ou o método Lagrangiano aumentado (SIMO e LAURSEN, 1992).

As provas da existência de pelo menos uma solução e da convergência ao problema original quando o fator de penalidade tende ao infinito são apresentadas por Kikuchi e Song (1981). Também Kikuchi e Oden (1984) apresentaram um detalhado trabalho sobre o problema de contato em elasto-estática, cobrindo desde as bases matemáticas do problema até suas aplicações numéricas.

Poucos trabalhos utilizando métodos numéricos na solução do problema de flexão de placas sujeitas a condições de contato unilaterais foram publicados, dentre os quais pode-se destacar os apresentados por Ohtake, Oden e Kikuchi (1980a, 1980b) e Kikuchi e Oden (1988) onde utilizaram a estrutura da teoria de von Kármán para placas finas, o de Selke (1986) apresentando duas formulações para placas, uma para a teoria de primeira ordem e outra para a teoria de ordem superior, e o de Luersen (1994) utilizando a teoria de primeira ordem, i. e., teoria de Mindlin-Reissner, para placas semi-espessas.

Nesta dissertação utilizar-se o método da penalidade para transformar a desigualdade variacional, resultante do problema de contato, em uma sequência de igualdades variacionais. O problema de contato unilateral é modelado com o uso desta

formulação. A qual é então particularizada para o caso de placas semi-espessas através do uso de uma teoria de placas de ordem superior, a teoria de Lo, Christensen e Wu, e posteriormente o problema é resolvido numericamente utilizando o método dos elementos finitos.



# CAPÍTULO 2

## Formulação do Problema de Contato Unilateral em Mecânica dos Sólidos

### 2.1. Introdução

Neste capítulo, após serem apresentados alguns fundamentos básicos de elasticidade finita, é obtida uma formulação Lagrangiana incremental para o problema de mecânica dos sólidos, sujeito às restrições unilaterais. As condições de contato incrementais são introduzidas na forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais, resultando em uma desigualdade variacional, a qual é resolvida utilizando-se o método da penalidade. Com o intuito de fundamentar esta forma de resolução da desigualdade variacional é apresentado, com alguma formalidade matemática, o método da penalidade.

### 2.2. Fundamentos de Elasticidade Finita

Quando se resolve problemas de mecânica dos sólidos onde os deslocamentos da estrutura em análise são grandes, a hipótese amplamente utilizada na teoria clássica da elasticidade linear, de se confundir as configurações inicial e final, não pode mais ser utilizada. No caso de grandes deslocamentos existe a necessidade de se utilizar uma formulação que leve em consideração as mudanças na geometria da estrutura.

Na descrição do movimento de um corpo sujeito a grandes deslocamentos existem quatro métodos para formulação destes problemas (SPENCER, 1980; GADALA, DOKAINISH e ORAVAS, 1984).

Primeiro, a **descrição material** onde as variáveis independentes são um ponto  $P$  no corpo e o tempo  $t$ , raramente utilizada em aplicações com elementos finitos.

Segundo, a **descrição referencial** onde as variáveis independentes são a posição  ${}^R x$  de um ponto  $P$ , em uma configuração de referência arbitrariamente escolhida, e o tempo  $t$ . Esta descrição é frequentemente chamada de formulação Lagrangiana.

Terceiro, a **descrição espacial** onde as variáveis independentes são a posição corrente  ${}^I x$  de um ponto  $P$  e o tempo  $t$ . Esta descrição é frequentemente chamada de formulação Euleriana. Com a descrição espacial, estamos interessados no que está acontecendo em uma região fixa do espaço com o passar do tempo, por este motivo esta descrição é conveniente para o estudo de fluidos.

Quarto, a **descrição relativa** onde as variáveis independentes são a posição  ${}^I x$  na configuração corrente e o tempo  $t$ . A configuração corrente é tomada como a configuração de referência e as configurações passadas e futuras são descritas em relação a corrente. A variável tempo  $t$  é o tempo quando o ponto  $P$  ocupa a posição  $({}^I x, t)$ . É importante compreender que a natureza da descrição relativa é referencial ou Lagrangiana, no sentido de que a posição de referência é agora denotada por  ${}^I x$  no tempo  $t$  ao invés de  ${}^0 x$  no tempo  $t=0$ . Isto justifica a classificação da formulação Lagrangiana atualizada como um caso especial da descrição relativa.

As formulações Lagrangiana total e atualizada são, de longe, as formulações mais utilizadas na solução de problemas com não-linearidades estruturais via elementos finitos (ODEN, 1983). Ambas as formulações Lagrangianas de elementos finitos utilizam um método incremental, sendo o problema linearizado em cada incremento e o carregamento total sendo aplicado em incrementos de carga (passos de carga).

Na formulação Lagrangiana total toma-se o estado inicial, anterior à aplicação das cargas, como sendo o de referência. Já na formulação Lagrangiana atualizada, a referência é um estado intermediário, já totalmente determinado, acompanhando o corpo deformado, sendo assim possível descrever as próximas configurações deformadas baseando-se no estado presente já determinado. A utilização da formulação Lagrangiana incremental total para solução de problemas de mecânica dos sólidos com restrições unilaterais foi detalhadamente apresentada por Selke (1986) e Selke e Kikuchi (1987).

Neste trabalho será adotada uma formulação lagrangiana incremental atualizada. O motivo desta escolha situa-se nas inúmeras hipóteses simplificativas possíveis das relações cinemáticas, na maior facilidade de interpretação das equações do balanço de energia e no fato de que o algoritmo resultante desta formulação proporciona menor esforço numérico (FONSECA, 1990).

### 2.2.1. Definições

Na presente seção serão apresentados alguns conceitos fundamentais utilizados no estudo da teoria incremental de deformação, usada na solução de problemas não-lineares em sólidos. Como referências, serão utilizadas as formas de apresentação de Washizu (1982) e Gadala, Dokainish e Oravas (1984).

Considera-se um corpo deformável  $\Omega$  ocupando uma região finita do espaço Euclidiano. Adotando-se a formulação incremental, divide-se a trajetória do carregamento de um corpo elástico em estados de equilíbrio  ${}^0\Omega$ ,  ${}^1\Omega$  e  ${}^2\Omega$ , onde  ${}^0\Omega$  é o estado inicial,  ${}^1\Omega$  é um estado intermediário arbitrário e  ${}^2\Omega$  é o estado final da deformação, o qual é assumido estar incrementalmente próximo ao estado  ${}^1\Omega$ , assegurando assim que todas as equações governantes possam ser linearizadas em relação aos incrementos das quantidades (Figura 2.1) (WASHIZU, 1982).

As partículas do corpo serão identificadas por  $P$  e, por simplicidade, mas sem qualquer perda de generalidade, será estabelecido um sistema de coordenadas cartesiano tridimensional fixo no espaço para descrever o movimento do corpo. Desta forma, o ponto  ${}^0P$  da configuração  ${}^0\Omega$ , em um instante  $t_0$ , é identificado pelo vetor posição  ${}^0\mathbf{x}$ , em relação ao sistema acima definido.

Da mesma forma, no estado intermediário arbitrário, em um instante  $t_1$  do processo de deformação do corpo, ter-se-á o ponto  ${}^0P$  da configuração  ${}^0\Omega$  deslocado para posição  ${}^1P$  da configuração  ${}^1\Omega$ , sendo este identificado pelo vetor posição  ${}^1\mathbf{x}$ . Seguindo o processo incremental, encontra-se o estado final da deformação em um instante  $t_2$ , tendo-se o ponto  ${}^1P$  da configuração  ${}^1\Omega$  deslocado para uma nova posição  ${}^2P$  da configuração  ${}^2\Omega$ , sendo o mesmo agora identificado pelo vetor posição  ${}^2\mathbf{x}$ .<sup>(1)</sup>

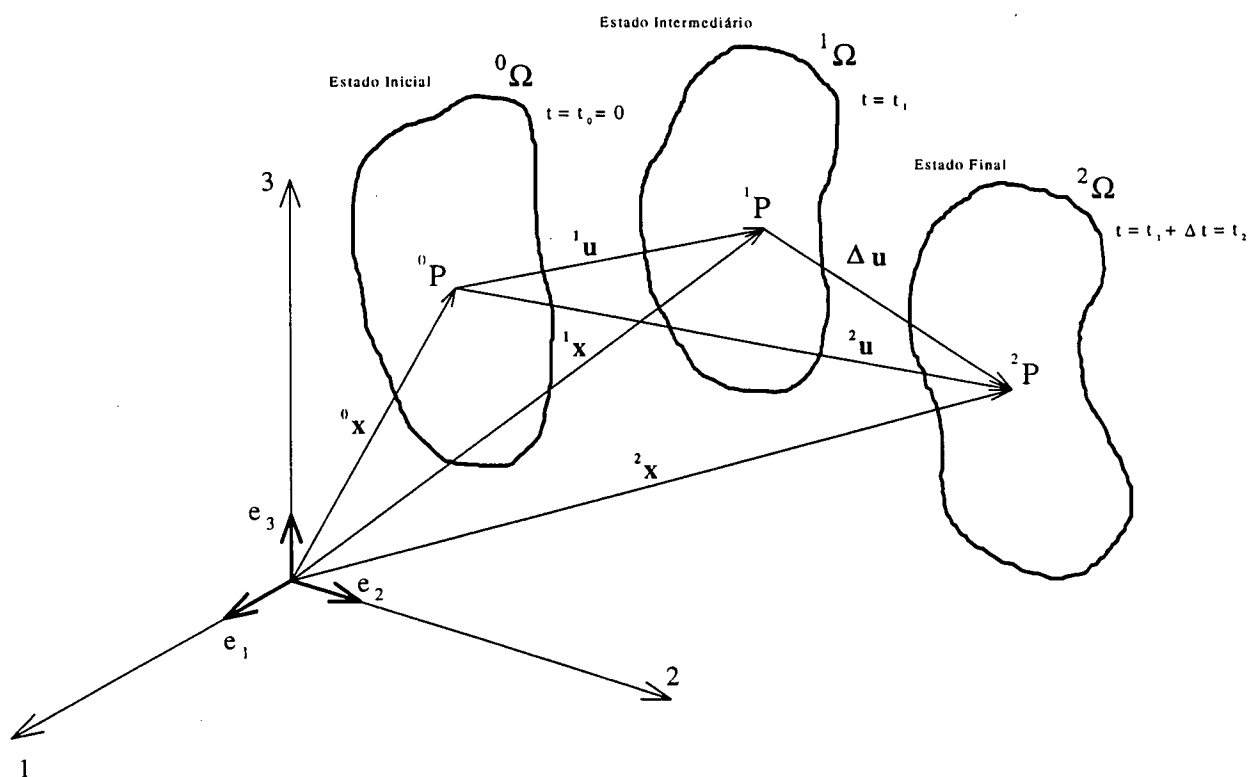


Figura 2.1 Trajetória do movimento incremental de um corpo elástico  $\Omega$ .

<sup>(1)</sup> De agora em diante, considerar-se-á o índice superior esquerdo significando o estado do corpo.

### 2.2.2. Gradientes de Deformação

Fazendo referência à Figura 2.1, pode-se escrever os vetores posição  $\mathbf{x}$  na configuração  ${}^1\Omega$  e  ${}^2\Omega$  em relação aos vetores deslocamento  $\mathbf{u}$  na seguinte forma,

$${}^1\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} + {}^1\mathbf{u}, \quad (2.1a)$$

$${}^2\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} + {}^2\mathbf{u} = {}^1\mathbf{x} + ({}^2\mathbf{u} - {}^1\mathbf{u}) = {}^1\mathbf{x} + \Delta\mathbf{u}. \quad (2.1b)$$

Portanto, na formulação Lagrangiana atualizada tem-se, cada incremento analisado sendo referenciado à sua configuração inicial, i. e., o incremento que leva o corpo da configuração  ${}^1\Omega$  para  ${}^2\Omega$  terá como referência a configuração  ${}^1\Omega$ .

O gradiente de deformação da configuração  ${}^1\Omega$  em relação a configuração  ${}^0\Omega$  pode ser dado por

$${}_0^1\mathbf{F} = \frac{\partial {}^1\mathbf{x}}{\partial {}^0\mathbf{x}} = \mathbf{I} + \frac{\partial {}^1\mathbf{u}}{\partial {}^0\mathbf{x}}, \quad (2.2a)$$

e de maneira similar, o da configuração  ${}^2\Omega$  em relação a configuração  ${}^1\Omega$ , é dado por

$${}_1^2\mathbf{F} = \frac{\partial {}^2\mathbf{x}}{\partial {}^1\mathbf{x}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \Delta\mathbf{u}}{\partial {}^1\mathbf{x}}. \quad (2.2b)$$

O tensor gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  é em geral não simétrico e, por incorporar as rotações e deslocamentos do corpo elástico, não é invariante a estes movimentos.

---

<sup>(2)</sup> De agora em diante, considerar-se-á o índice inferior esquerdo significando o estado de referência.

### 2.2.3. Definições de Deformação

Em problemas envolvendo não-linearidades, diversos tipos de tensores para medir deformação em elasticidade finita podem ser utilizados. A maioria deles podem ser obtidos a partir dos gradientes de deformação. Dentre estes tensores, serão inicialmente apresentados os tensores de Cauchy-Green, os quais caracterizam-se por serem simétricos e unitários para os movimentos de corpo rígido.

Inicialmente, define-se o tensor de Cauchy-Green à direita, em notação matricial, como

$${}^1_0\mathbf{C} = {}^1_0\mathbf{F}^T {}^1_0\mathbf{F} \quad (2.3a)$$

ou, em notação indicial, como

$${}^1_0C_{ij} = \frac{\partial^1 x_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 x_k}{\partial^0 x_j}, \quad (3) \quad (2.3b)$$

e o tensor de Cauchy-Green à esquerda, em notação matricial, como

$${}^1_0\mathbf{B} = {}^1_0\mathbf{F} {}^1_0\mathbf{F}^T \quad (2.4a)$$

ou, em notação indicial, como

$${}^1_0B_{ij} = \frac{\partial^1 x_i}{\partial^0 x_k} \frac{\partial^1 x_j}{\partial^0 x_k}. \quad (2.4b)$$

---

(3) Utilizar-se-á neste trabalho a convenção de soma de Einstein, onde os índices latinos variam de 1 a 3 e os índices gregos variam de 1 a 2.

A seguir, são apresentados os tensores de Green-Lagrange e Almansi, os quais são extensivamente utilizados como medidas de deformação, por serem ambos simétricos e se anularem para movimentos de corpo rígido. Define-se o tensor deformação de Green-Lagrange  ${}^1_0\mathbf{E}$  por

$${}^1_0\mathbf{E} = \frac{1}{2}({}^1_0\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.5a)$$

ou, em notação indicial

$${}^1_0E_{ij} = \frac{1}{2}({}^1_0C_{ij} - \delta_{ij}), \quad (2.5b)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, e o tensor deformação de Almansi  ${}^1_0\boldsymbol{\gamma}$  é definido como

$${}^1_0\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - {}^1_0\mathbf{B}^{-1}) \quad (2.6a)$$

ou, em notação indicial

$${}^1_0\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - {}^1_0B_{ij}^{-1}). \quad (2.6b)$$

O tensor de Green-Lagrange  ${}^1_0\mathbf{E}$  é utilizado para representar fenômenos onde é desejável uma descrição Lagrangiana dos movimentos e o tensor de Almansi  ${}^1_0\boldsymbol{\gamma}$  é utilizado onde é desejável uma descrição Euleriana dos movimentos.

O tensor deformação de Green-Lagrange, definido na equação (2.5), escrito em termos dos vetores posição, pode ser apresentado como

$${}^1_0E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^1 x_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 x_k}{\partial^0 x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (2.7)$$

e, reescrevendo a expressão acima com auxílio da equação (2.1a), tem-se

$${}^1_0E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^1 u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^1 u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_j} \right), \quad (2.8)$$

já escrito em termos dos deslocamentos. Para determinadas aplicações, o tensor da expressão acima pode ser decomposto em uma parcela linear do tensor Green-Lagrange

$${}^1_0E_{ij}^{\text{Linear}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^1 u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^1 u_j}{\partial^0 x_i} \right), \quad (2.9)$$

e outra parcela que caracteriza o aspecto não-linear do mesmo

$${}^1_0E_{ij}^{\text{N\~ao-Linear}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_j} \right). \quad (2.10)$$

Supondo que seja aplicado um incremento de deslocamento ao corpo elástico ( ${}^1u_i \rightarrow {}^1u_i + \Delta u_i$ ), pode-se então obter o conhecido tensor deformação Green-Lagrange incremental dado por

$$\Delta {}^1_0E_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \left( \delta_{kj} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_j} \right) \frac{\partial \Delta u_k}{\partial^0 x_i} + \left( \delta_{ki} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_i} \right) \frac{\partial \Delta u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^1 \Delta u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 \Delta u_k}{\partial^0 x_j} \right]. \quad (2.11)$$



Pode-se ainda adotar uma definição alternativa para o incremento de deformação do estado  ${}^2\Omega$ , o qual referencia-se na configuração anterior  ${}^1\Omega$ , e é dado por

$$\Delta_1^2 \mathbf{E}_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial {}^1x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial {}^1x_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^1x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^1x_j} \right) \quad (2.12)$$

onde  $\Delta_1^2 \mathbf{E}^*$  é denominado tensor deformação de Green-Lagrange atualizado, com suas duas primeiras parcelas representando a parte linear do tensor e a última representa a parte não-linear do tensor. A lei de transformação entre  $\Delta_1^2 \mathbf{E}^*$  e  $\Delta_0^1 \mathbf{E}$  é dada por

$$\Delta_1^2 \mathbf{E}_{ij}^* = \frac{\partial {}^0x_r}{\partial {}^1x_i} \frac{\partial {}^0x_s}{\partial {}^1x_j} \Delta_0^1 \mathbf{E}_{rs} \quad (2.13a)$$

ou por

$$\Delta_0^1 \mathbf{E}_{ij} = \frac{\partial {}^1x_r}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial {}^1x_s}{\partial {}^0x_j} \Delta_1^2 \mathbf{E}_{rs}^* . \quad (2.13b)$$

Considerando que as configurações  ${}^1\Omega$  e  ${}^2\Omega$  estejam suficientemente próximas, pode-se escrever a versão linearizada do tensor de Green-Lagrange  $\Delta_1^2 \mathbf{E}^*$ , com respeito à  $\Delta u_k$ , como

$$\Delta_1^2 \mathbf{E}_{ij}^* \cong \Delta_1^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial {}^1x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial {}^1x_i} \right) . \quad (2.14)$$

### 2.2.4. Definições de Tensão

Torna-se importante neste ponto fazer algumas considerações sobre a escolha de um tensor de tensão compatível com a formulação Lagrangiana. Uma descrição bastante detalhada sobre os diversos tensores tensão disponíveis é apresentada por Washizu (1982).

Para sustentar uma discussão consistente sobre este assunto, deve-se recordar que em uma formulação Euleriana, onde a configuração de referência é tomada sempre como a configuração final, o tensor mais utilizado é o tensor tensão de Cauchy, denotado neste trabalho por  $\sigma$ . Porém, nas formulações Lagrangianas são amplamente utilizados (WASHIZU, 1982; SELKE, 1986; LUERSEN, 1994) os tensores tensão de Piola-Kirchhoff. Com base neste fato, para a análise dos problemas aqui estudados adotam-se estes tensores, e a primeira dificuldade que surge é o fato de que o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff não é simétrico. Ele é dado por (ATKIN e FOX, 1980)

$${}^1_0\mathbf{T} = {}^1_0J \, {}^1_0\mathbf{F}^{-1} \, {}^1_0\boldsymbol{\sigma} \quad (2.15a)$$

ou, em termos das componentes

$${}^1_0T_{ij} = {}^1_0J \, \frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^1x_r} \, {}^1_0\sigma_{rj} \, , \quad (2.15b)$$

onde  ${}^1_0J = |{}^1_0\mathbf{F}|$  é o Jacobiano da transformação. Fisicamente,  ${}^1_0J$  representa a relação entre as densidades do corpo elástico nas configurações  ${}^0\Omega$  e  ${}^1\Omega$ , ou seja,  ${}^1_0J = {}^0\rho / {}^1\rho$ . Já o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, embora não possua interpretação física direta, é simétrico, e devido a esta facilidade é utilizado com maior frequência. Este tensor é dado por

$${}^1_0\mathbf{S} = {}^1_0J {}^1_0\mathbf{F}^{-1} {}^1_0\boldsymbol{\sigma} \left({}^1_0\mathbf{F}^{-1}\right)^T \quad (2.16a)$$

ou, em termos das componentes

$${}^1_0S_{ij} = {}^1_0J \frac{\partial^0 x_i}{\partial^1 x_r} {}^1_0\sigma_{rs} \frac{\partial^0 x_j}{\partial^1 x_s} . \quad (2.16b)$$

Como estamos interessados no tensor tensão incremental, vamos ainda definir os incrementos do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff. Seja  $\Delta^2_0\mathbf{S}$  o tensor incremento considerando a formulação Lagrangiana total, i.e., um acréscimo devido à passagem da configuração  ${}^1\Omega$  para a  ${}^2\Omega$ , tendo como referência a configuração inicial  ${}^0\Omega$ , e seja também  $\Delta^2_1\mathbf{S}^*$  o tensor incremento atualizado considerando a formulação Lagrangiana atualizada, i.e., na passagem da configuração  ${}^1\Omega$  para a  ${}^2\Omega$ , tendo como referência a configuração  ${}^1\Omega$ . A relação entre estes tensores incremento é dada por

$$\Delta^2_1S^*_{ij} = \frac{1}{{}^1_0J} \frac{\partial^1 x_r}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 x_s}{\partial^0 x_j} \Delta^2_0S_{rs} . \quad (2.17)$$

No final do incremento, i.e., na configuração  ${}^2\Omega$ , um processo de atualização do tensor tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}$  deve ser realizado, com o objetivo de se obter o tensor tensões com significado físico definido, através da expressão

$${}^2_1\sigma_{ij} = {}^1_0\sigma_{ij} + \Delta^2_1\sigma_{ij} = \frac{1}{\Delta^2_1J} \frac{\partial^2 x_r}{\partial^1 x_i} \frac{\partial^2 x_s}{\partial^1 x_j} \left( {}^1_0\sigma_{rs} + \Delta^2_1S^*_{rs} \right) , \quad (2.18)$$

onde  $\Delta^2_1J$  é dado por

$$\Delta_1^2 J = \frac{{}_0^2 J}{{}_0^1 J} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial^1 x_1} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial^1 x_2} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial^1 x_3} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial^1 x_1} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial^1 x_2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial^1 x_3} \\ \frac{\partial^2 x_3}{\partial^1 x_1} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial^1 x_2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial^1 x_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^1 x_1}{\partial^1 x_1} & \frac{\partial^1 x_1}{\partial^1 x_2} & \frac{\partial^1 x_1}{\partial^1 x_3} \\ \frac{\partial^1 x_2}{\partial^1 x_1} & \frac{\partial^1 x_2}{\partial^1 x_2} & \frac{\partial^1 x_2}{\partial^1 x_3} \\ \frac{\partial^1 x_3}{\partial^1 x_1} & \frac{\partial^1 x_3}{\partial^1 x_2} & \frac{\partial^1 x_3}{\partial^1 x_3} \end{vmatrix}}. \quad (2.19)$$

### 2.2.5. Princípio dos Trabalhos Virtuais

Seja uma região aberta no espaço  $\mathcal{R}^3$  ocupada por um corpo deformável  $\Omega$  com densidade  $\rho$  e limitada por um contorno  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F \cup \Gamma_C$ , contínuo no sentido de Lipschitz, i.e.,  $\Omega \in C^{0,1}$ . Assume-se que o corpo está fixo no contorno  $\Gamma_D$ , é submetido a um conjunto de cargas  $\mathbf{t}$  atuantes sobre o contorno  $\Gamma_F$  e está sujeito a forças de corpo  $\mathbf{f}$  atuando sobre o domínio do corpo  $\Omega$  (Figura 2.2).

Denomina-se o contorno  $\Gamma_C$  à parte da superfície onde o contato entre o corpo elástico  $\Omega$  e uma superfície rígida pode acontecer. Isto significa que durante todo o processo de deformação a região efetiva de contato encontra-se sempre dentro de  $\Gamma_C$ .

Considerando-se o equilíbrio no interior do corpo na configuração deformada  ${}^1\Omega$ , a expressão forte deste problema é apresentada pelo conjunto de equações de equilíbrio.

$$\frac{\partial_0^1 \sigma_{ij}}{\partial^1 x_i} + {}^1\rho \, {}^1f_i = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.20)$$

onde  ${}^1_0\sigma_{ij}$  representa as componentes do tensor tensão de Cauchy na configuração  ${}^1\Omega$ , definido em termos dos deslocamentos  ${}^1\mathbf{u}$ . Adicionalmente o corpo  $\Omega$  está sujeito às seguintes condições de contorno

$${}^1u_i = {}^1g_i \quad \text{sobre } {}^1\Gamma_D \quad (2.21a)$$

$${}^1_0\sigma_{ij} {}^1n_j = {}^1t^F_i \quad \text{sobre } {}^1\Gamma_F, \quad (2.21b)$$

onde  ${}^1g_i$  representam as componentes do vetor deslocamento prescrito sobre o contorno  ${}^1\Gamma_D$ ,  ${}^1t^F_i$  representam as componentes do vetor das cargas superficiais prescritas sobre o contorno  ${}^1\Gamma_F$ ,  ${}^1n_i$  representam as componentes do vetor normal ao contorno  $\Gamma$ . Obviamente, será necessário impor condições de contorno sobre a superfície de contato  ${}^1\Gamma_C$ , porém a dedução destas condições de contorno será feita oportunamente em outra seção, para o caso particular do corpo  $\Omega$  em análise ser uma placa.

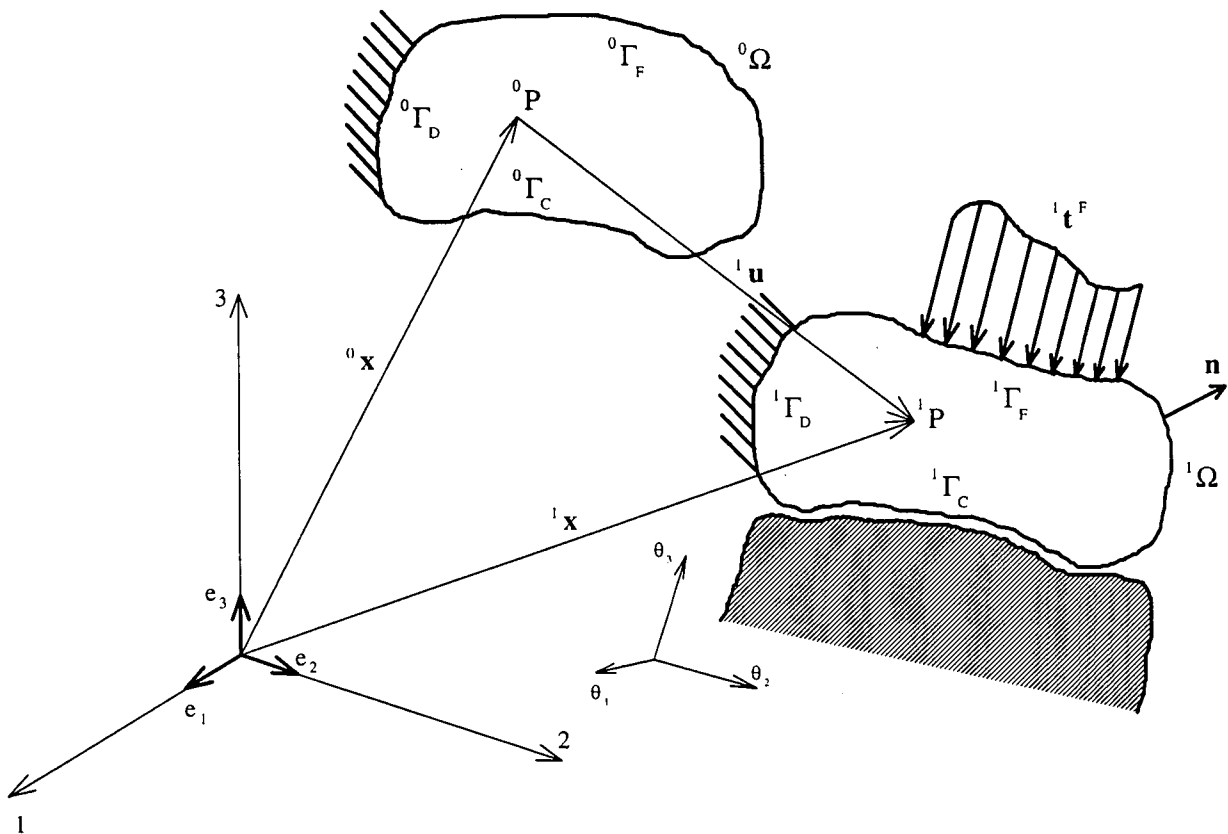


Figura 2.2 Corpo elástico próximo a uma superfície rígida, sujeito à restrições de contato unilateral.

Uma vez estabelecido o problema acima pode-se agora apresentá-lo de uma forma generalizada, utilizando o princípio dos trabalhos virtuais para a configuração intermediária  ${}^1\Omega$ , como (MALVERN, 1969)

$$\int_{{}^1\Omega} {}^1\sigma_{ij} \delta^1\epsilon_{ij} d\Omega = \int_{{}^1\Omega} {}^1\rho^1 f_i \delta u_i d\Omega + \int_{{}^1\Gamma_F} {}^1t_i^F \delta u_i d\Gamma + \int_{{}^1\Gamma_C} {}^1t_i^C \delta u_i d\Gamma \quad (2.22)$$

$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0$  sobre  ${}^1\Gamma_D$ , onde  $\delta u_i$  representam as componentes do vetor de deslocamento virtual,  ${}^1t_i^F$  e  ${}^1t_i^C$  são as componentes do vetor de tração superficial em  ${}^1\Gamma_F$  e  ${}^1\Gamma_C$ , respectivamente, e  $\delta^1\epsilon_{ij}$  é a variação das componentes do tensor de deformação infinitesimal, o qual é definido como

$$\delta^1\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.23)$$

A expressão apresentada em (2.22) é conhecida como a formulação fraca do problema que, além de situar-se numa posição vantajosa no que se refere à sua aplicação em métodos numéricos, conta com uma estrutura matemática (análise convexa, análise funcional, princípios variacionais, etc.) suficientemente poderosa para facilitar o estudo de existência e unicidade de soluções, estimadores de erro, etc.

O princípio dos trabalhos virtuais, escrito em relação à configuração inicial  ${}^0\Omega$ , pode ser dado por

$$\int_{{}^0\Omega} {}^0S_{ij} \delta^1E_{ij} d\Omega = \int_{{}^0\Omega} {}^0\rho^0 f_i \delta u_i d\Omega + \int_{{}^0\Gamma_F} {}^0t_i^F \delta u_i d\Gamma + \int_{{}^0\Gamma_C} {}^0t_i^C \delta u_i d\Gamma \quad (2.24)$$

$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0$  sobre  ${}^0\Gamma_D$ , onde  ${}^0t_i^F$  e  ${}^0t_i^C$  são as componentes do vetor de tração superficial em  ${}^0\Gamma_F$  e  ${}^0\Gamma_C$ , respectivamente,  ${}^0f_i$  são as componentes de vetor força de corpo e  ${}^0\rho$  é a densidade do corpo no estado  ${}^0\Omega$  (a densidade  ${}^0\rho$ , de acordo com a relação anteriormente apresentada, pode ser dada por  ${}^0\rho = {}^1\rho {}^1J$ , onde  ${}^1J$  é o Jacobiano da transformação),  ${}^1S_{ij}$  são as componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff definido na configuração  ${}^0\Omega$  e, finalmente,  $\delta_0^1E_{ij}$  é a variação dos componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange, equação (2.7), dada por

$$\delta_0^1E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^0x_i} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial {}^0x_j} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0x_i} \right). \quad (2.25)$$

Será considerado agora que o corpo  $\Omega$  encontra-se em uma configuração de referência intermediária  ${}^1\Omega$ , e que este é submetido a um deslocamento incremental  $\Delta \mathbf{u}$ , num instante  $t + \Delta t$ , conforme mostrado na Figura 2.3, causado por incrementos das forças de corpo  $\Delta^0 \mathbf{f}$  e pelas trações  $\Delta^0 \mathbf{t}^F$  e  $\Delta^0 \mathbf{t}^C$  aplicadas nas superfícies  ${}^0\Gamma_F$  e  ${}^0\Gamma_C$ , respectivamente, as quais produzem um incremento no tensor tensão  $\Delta_0^1 \mathbf{S}$ . Então, escreve-se a forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais como

$$\begin{aligned} \int_{{}^0\Omega} ({}^1S_{ij} + \Delta_0^1 S_{ij}) \delta ({}^1E_{ij} + \Delta_0^1 E_{ij}) d\Omega &= \int_{{}^0\Omega} ({}^0b_i + \Delta^0 b_i) \delta u_i d\Omega + \\ &+ \int_{{}^0\Gamma_F} ({}^0t_i^F + \Delta^0 t_i^F) \delta u_i d\Gamma + \int_{{}^0\Gamma_C} ({}^0t_i^C + \Delta^0 t_i^C) \delta u_i d\Gamma \end{aligned} \quad (2.26)$$

$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0$  sobre  ${}^0\Gamma_D$ , onde  ${}^0b_i = {}^0\rho {}^0f_i$  e  $\Delta^0 b_i = {}^0\rho \Delta^0 f_i$ .

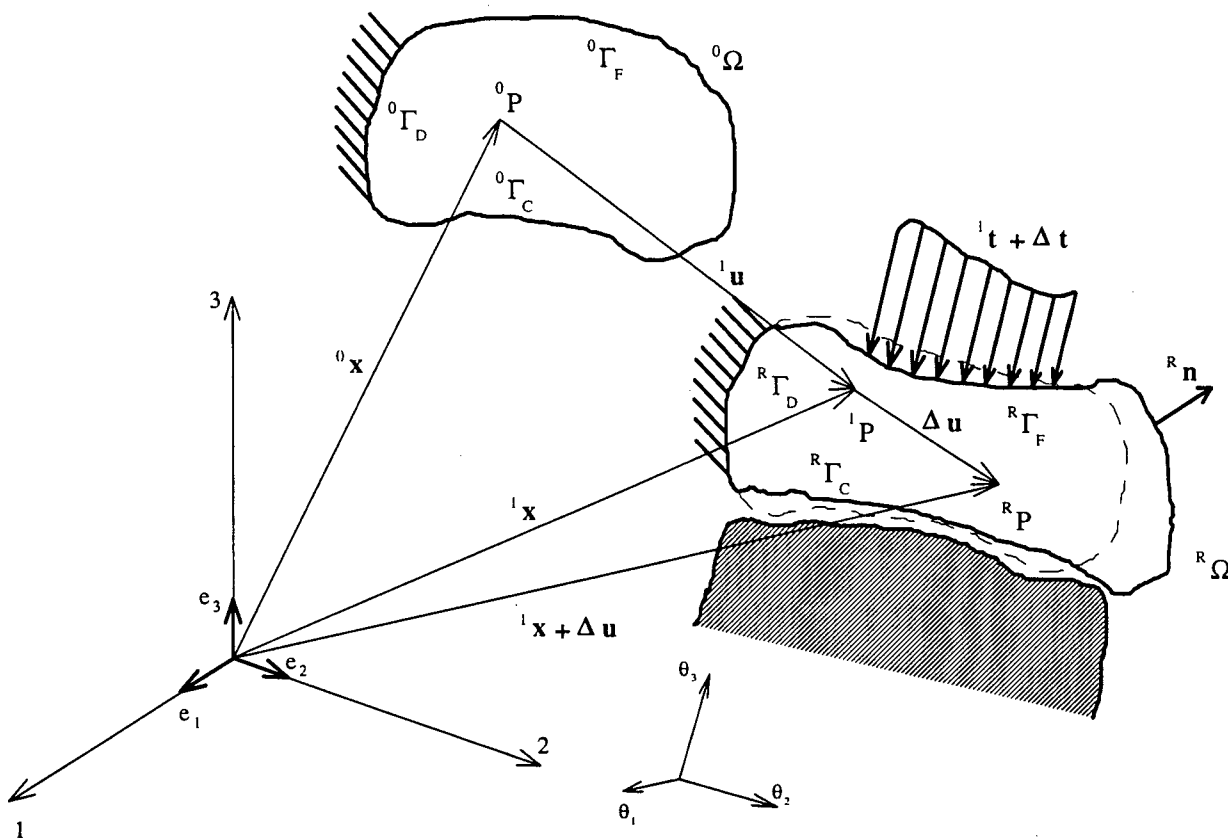


Figura 2.3 Corpo elástico sujeito a restrições de contato unilateral, submetido a um processo incremental de deformação.

Desprezando-se os termos de ordem superior dos deslocamentos incrementais, pode-se obter a forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais, em relação a configuração  ${}^0\Omega$ , dada por

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \Delta_0^1 S_{ij} \delta_0^1 E_{ij} + {}^1 S_{ij} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^0 x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0 x_j} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \Delta^0 b_i \delta u_i d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_F} \Delta^0 t_i^F \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \Delta^0 t_i^C \delta u_i d\Gamma + R \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\forall \delta u_i \mid \delta \bar{u}_i = 0 \text{ sobre } {}^0\Gamma_D, \text{ onde}$$



$$\begin{aligned}
R = & - \int_{^0\Omega} \Delta^1 S_{ij} \delta^1 E_{ij} \, d\Omega + \int_{^0\Omega} {}^0 b_i \delta u_i \, d\Omega + \\
& + \int_{^0\Gamma_F} {}^0 t_i^F \delta u_i \, d\Gamma + \int_{^0\Gamma_C} {}^0 t_i^C \delta u_i \, d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Também, pode-se escrever o princípio dos trabalhos virtuais, em relação a uma configuração de referência qualquer  ${}^R\Omega$ , como

$$\begin{aligned}
& \int_{{}^R\Omega} \left( \Delta^R S_{ij} \delta^R E_{ij} + {}^R S_{ij} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^R x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^R x_j} \right) d\Omega = \int_{{}^R\Omega} \Delta^R b_i \delta u_i \, d\Omega + \\
& + \int_{{}^R\Gamma_F} \Delta^R t_i^F \delta u_i \, d\Gamma + \int_{{}^R\Gamma_C} \Delta^R t_i^C \delta u_i \, d\Gamma + R
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0$  sobre  ${}^R\Gamma_D$ , onde

$$\begin{aligned}
R = & - \int_{{}^R\Omega} \Delta^R S_{ij} \delta^R E_{ij} \, d\Omega + \int_{{}^R\Omega} {}^R b_i \delta u_i \, d\Omega + \\
& + \int_{{}^R\Gamma_F} {}^R t_i^F \delta u_i \, d\Gamma + \int_{{}^R\Gamma_C} {}^R t_i^C \delta u_i \, d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Em geral, é necessário corrigir os erros da solução linearizada acima obtida. Isto pode ser feito considerando-se a diferença entre o carregamento externo e a distribuição das tensões internas. Esta diferença, aqui representada por  $R$ , pode ser interpretada como uma energia residual que deve tender a zero para que o corpo esteja em equilíbrio e, para isto, este resíduo é aplicado novamente no sistema até que o equilíbrio seja alcançado. Serão definidos critérios de tolerância em relação ao termo de resíduo  $R$  para medir a precisão da solução aproximada obtida a partir da formulação apresentada.

### 2.3. Condições Cinemáticas de Contato

Considere a situação geométrica apresentada na Figura 2.2, onde o corpo elástico  $\Omega$ , submetido a um processo de deformação, está sujeito às restrições de contato unilateral oriundas de uma superfície rígida, absolutamente fixa abaixo do corpo.

A superfície rígida é uma região em  $\mathcal{R}^3$  semi-infinita e não limitada, chamada fundação, que limita o movimento do corpo, quando este entra em contato com aquela. Para melhor representar o problema de contato, dois sistemas de coordenadas são utilizados, um global  $(1, 2, 3)$  e outro local  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Define-se então a superfície da fundação, parametricamente, pela equação

$$\theta_3 = \psi(\theta_1, \theta_2)$$

e a superfície  $\Gamma_C$  do corpo  $\Omega$ , a qual representa a parte do corpo que entrará em contato com a fundação, pela equação

$$\theta_3 = \phi(\theta_1, \theta_2)$$

onde, por enquanto,  $\psi$  e  $\phi$  são consideradas funções regulares, sendo  $\psi(\theta_1, \theta_2) \leq \phi(\theta_1, \theta_2)$  para todos os pontos  $(\theta_1, \theta_2)$  na projeção de  $\Gamma_C$  no plano  $(\theta_1 - \theta_2)$ .

O corpo elástico  $\Omega$ , submetido a um processo de deformação, tem sua superfície  $\Gamma_C$  sujeita a uma restrição de movimento além da fundação, uma vez que ele não pode penetrar a superfície rígida. Assim, tem-se

$$\phi(\theta_1, \theta_2) + \eta_3(\theta_1, \theta_2) \geq \psi(\theta_1 + \eta_1(\theta_1, \theta_2), \theta_2 + \eta_2(\theta_1, \theta_2)) \quad (2.31)$$

onde  $\mathbf{u} = u_i \cdot \mathbf{e}_i$ . Esta igualdade é referenciada como a condição cinemática de contato para deslocamentos finitos de um corpo sujeito a restrição unilateral, a qual garante a condição de impenetrabilidade de qualquer ponto  $(\theta_1, \theta_2)$  do corpo na fundação.

### 2.3.1. Forma Incremental e Linearizada da Condição de Contato

Para obter a condição cinemática de contato (2.31) em uma forma linearizada, aplicar-se-á uma expansão em séries de Taylor para  $\psi(\theta_1, \theta_2)$ , onde serão desprezados os termos de ordem superior. Assim a equação (2.31) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \phi(\theta_1, \theta_2) + \eta_3(\theta_1, \theta_2) \geq & \psi(\theta_1, \theta_2) + \\ & + \eta_1(\theta_1, \theta_2) \frac{\partial \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} + \eta_2(\theta_1, \theta_2) \frac{\partial \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

ou, após algumas manipulações matemáticas, como

$$\begin{aligned} \{\eta\} \cdot \left( \frac{\partial \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \cdot \mathbf{e}_2 + (-1) \cdot \mathbf{e}_3 \right) - \\ - (\phi(\theta_1, \theta_2) - \psi(\theta_1, \theta_2)) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Observando agora que um vetor normal à superfície da fundação  $\mathbf{v}$ , na posição  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , é dado por (Figura 2.4)

$$\{v\} = v_i \cdot e_i = \frac{\left( \frac{\partial \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \cdot e_1, \frac{\partial \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \cdot e_2, (-1) \cdot e_3 \right)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \right)^2}} \quad (2.34)$$

então, dividindo ambos os lados da equação (2.33) por

$\left[ 1 + \left( \partial \psi(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_1 \right)^2 + \left( \partial \psi(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_2 \right)^2 \right]^{1/2}$  e simplificando, chega-se a condição

$$v_i \cdot \eta_i - g_N \leq 0, \quad (2.35)$$

onde  $g_N$  é a medida da folga entre o corpo e a fundação tal que

$$g_N = \frac{\phi(\theta_1, \theta_2) - \psi(\theta_1, \theta_2)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \right)^2}}. \quad (2.36)$$

Seja  $N = N_i e_i$  o mesmo vetor normal  $\{v\}$ , porém escrito em relação ao sistema de coordenadas globais. Da mesma forma,  $u = u_i \cdot e_i$  é o mesmo vetor deslocamento  $\{\eta\}$  também escrito em coordenadas globais. Portanto,  $\{v\} \cdot \{\eta\} = N \cdot u$  e a condição de impenetrabilidade (2.35) é reescrita como

$$N_i \cdot u_i - g_N \leq 0 \quad (2.37)$$

onde, as relações são dadas por

$$\{N\} = [B] \cdot \{v\} \text{ e } \{v\} = [B]^T \cdot \{N\}$$

$$\{u\} = [B] \cdot \{\eta\} \text{ e } \{\eta\} = [B]^T \cdot \{u\}$$

onde  $[B]$  é o operador matricial cujos componentes são os cossenos diretores. Relação similar ocorre entre os vetores posição  $\{x\}$  e  $\{\theta\}$  como (ODEN e REDDY, 1976)

$$\{x\} = [B] \cdot \{\theta\} + \{x_0\} \text{ e } \{\theta\} = [B]^T (\{x\} - \{x_0\})$$

onde  $\{x_0\}$  é a posição de origem no sistema de coordenadas global.

Deve-se observar que somente a linearização da função  $\psi(\theta_1, \theta_2)$  foi feita e isto implica que as condições (2.35) e (2.37) serão exatas se, e somente se, a fundação rígida for completamente plana. Para fundações curvadas, as condições (2.35) e (2.37) serão exatas se, e somente se, a direção de  $\theta_3$  coincidir com a direção do deslocamento; i.e.,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ . Este fato apresenta uma melhor orientação de como escolher um sistema de coordenadas local.

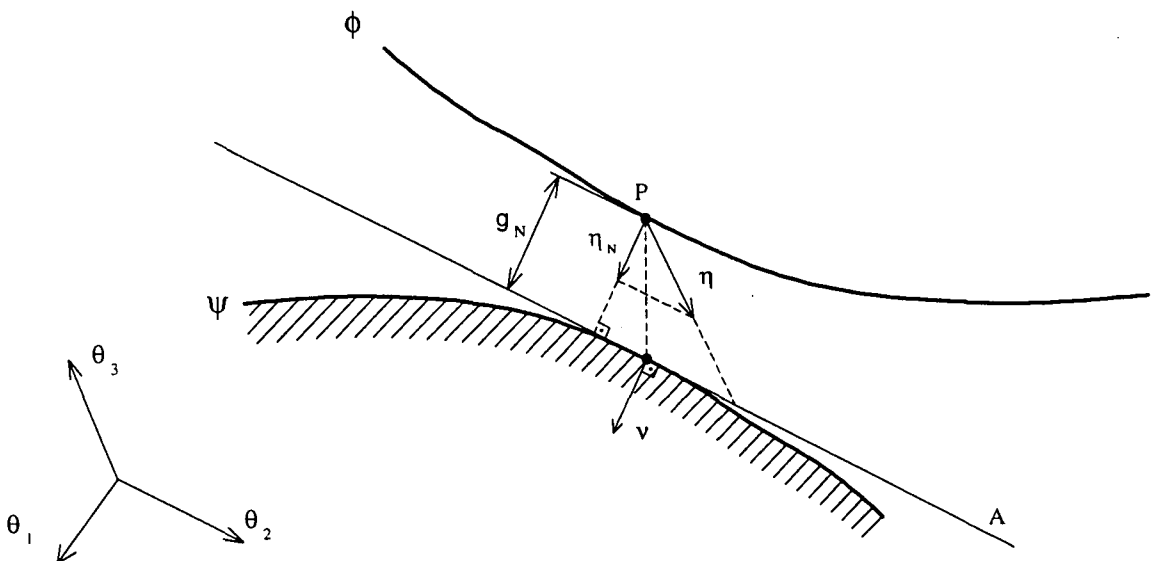


Figura 2.4 Condição de Impenetrabilidade.

A interpretação da condição (2.37) é que a componente normal do deslocamento em relação à superfície de contato deve ser menor ou, no máximo, igual à projeção da distância entre as duas superfícies,  $\phi$  e  $\psi$ , na mesma direção (Figura 2.4). Uma vez satisfeita esta condição ter-se-á um ponto P sobre a superfície  $\phi$  sempre acima ou, no máximo, sobre o plano tangente A.

Deve ser observado que para a obtenção das condições cinemáticas de contato, considerou-se que o corpo  $\Omega$  em análise se encontra acima da fundação rígida, com relação a coordenada local  $\theta_3$ . Se o corpo  $\Omega$  estiver situado abaixo da fundação rígida, uma cuidadosa mudança de sinais deverá ser realizada.

Para a obtenção da condição de impenetrabilidade incremental, suponha-se que o corpo  $\Omega$  sofra um pequeno deslocamento relativo de sua configuração atual, caracterizado por um pequeno incremento  $\Delta u_i$  nas componentes do vetor deslocamento. Então, de uma forma análoga àquela utilizada na dedução da condição cinemática de contato, pode-se obter a forma incremental da condição cinemática de contato, apresentada por Duvaut e Lions (1976) como a condição de contorno para o problema de Signorini, da seguinte maneira

$$\Delta u_N - \Delta g_N \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C, \quad (2.38)$$

onde

$$\Delta u_N = N_i \cdot \Delta u_i \quad (2.39a)$$

$$\Delta g_N = \frac{\phi(\mathbf{R}_{X_1}, \mathbf{R}_{X_2}) - \psi(\mathbf{R}_{X_1}, \mathbf{R}_{X_2})}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \psi(\mathbf{R}_{X_1}, \mathbf{R}_{X_2})}{\partial \mathbf{R}_{X_1}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi(\mathbf{R}_{X_1}, \mathbf{R}_{X_2})}{\partial \mathbf{R}_{X_2}} \right)^2}} \quad (2.39b)$$

### 2.3.2. Forma Incremental das Tensões de Contato

A condição de impenetrabilidade é deduzida na seção anterior apenas a partir de considerações puramente cinemáticas. Todavia, esta condição deve também ser compatível com as condições de tensões sobre a superfície de contato  $\Gamma_C$ . Seja  $\mathbf{t}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$  o vetor tensão de Cauchy na posição  $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$  da partícula com posição inicial  $(x_1, x_2, x_3)$  e onde  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}$  e seja  $\mathbf{n}$  o vetor normal à superfície  $\Gamma_C$ . Após uma expansão em série de Taylor do vetor  $\mathbf{t}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ , as componentes normal e tangencial deste vetor na superfície de contato  $\Gamma_C$  são dadas, respectivamente, por

$$t_N(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \cong t_N(\mathbf{x}) + \Delta t_N(\mathbf{x}) \quad (2.40a)$$

$$\mathbf{t}_T(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - t_N(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \mathbf{n}, \quad (2.40b)$$

onde  $t_N = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$  e  $\mathbf{t} = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$ , sendo  $\sigma_{ij}$  as componentes do tensor tensão de Cauchy.

Algumas observações são fundamentais antes de prosseguir. Em primeiro lugar, se não existirem trações aplicadas sobre  $\Gamma_C$  será desenvolvida uma tensão de compressão normal nos pontos de contato, e caso não exista contato  $t_N(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = 0$ . Em segundo lugar, desprezando o atrito sobre a superfície da fundação as componentes tangenciais da tensão  $\mathbf{t}_T(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$  devem ser zero para todo  $\mathbf{x} \in \Gamma_C$ . Pode-se expressar, matematicamente, estas considerações por

$$t_N(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = 0 \text{ e } \mathbf{t}_T(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = 0 \text{ se } \Delta u_N - \Delta g_N < 0 \quad (2.41a)$$

$$t_N({}^R x + \Delta x) \leq 0 \text{ e } t_T({}^R x + \Delta x) = 0 \text{ se } \Delta u_N - \Delta g_N = 0. \quad (2.41b)$$

Assume-se ainda que as superfícies em possível contato são suficientemente planas e que as normais de ambas as superfícies são praticamente colineares, permitindo confundi-las em uma única normal  $\mathbf{n}$ , i.e.,  $\mathbf{N} \equiv \mathbf{n}$ .

Coletando os resultados obtidos nas equações (2.38) e (2.41), chegar-se-á às condições gerais incrementais de contato para o caso de uma fundação rígida sem atrito, dadas por

$$\Delta u_N({}^0 x, {}^R u) - \Delta g_N({}^0 x, {}^R u) \leq 0 \quad (2.42a)$$

$$t_N({}^0 x + {}^R u) + \Delta t_N({}^0 x + {}^R u) \leq 0 \quad (2.42b)$$

$$t_T({}^0 x + {}^R u) + \Delta t_T({}^0 x + {}^R u) = 0 \quad (2.42c)$$

$$\left[ t_N({}^0 x + {}^R u) + \Delta t_N({}^0 x + {}^R u) \right] \left[ \Delta u_N({}^0 x + {}^R u) - \Delta g_N({}^0 x + {}^R u) \right] = 0 \quad (2.42d)$$

sobre  $\Gamma_C$ . As condições acima são úteis na imposição das restrições ao movimento do corpo elástico em termos de uma perturbação  $\Delta \mathbf{u}$  sobre uma configuração caracterizada por um campo de deslocamento  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ .

### 2.3.3. Formulação da Desigualdade Variacional

Na seção anterior foram deduzidas as condições incrementais de contato levando em consideração a configuração de referência,  ${}^R \Omega$ . Nesta seção, estas condições serão introduzidas na formulação lagrangiana incremental (2.29), para isto, será necessário uma decomposição do produto interno entre o vetor tração superficial e o vetor deslocamento virtual, em componentes normais e tangenciais, i.e.,



$${}^R t_i^C \delta u_i = {}^R t_N^C \delta u_N + {}^R t_T^C \cdot \delta u_T \quad (2.43a)$$

ou, na forma incremental

$$\Delta {}^R t_i^C \delta u_i = \Delta {}^R t_N^C \delta u_N + \Delta {}^R t_T^C \cdot \delta u_T . \quad (2.43b)$$

Considerando-se a igualdade

$${}^R t^C d^R \Gamma_C = t^C d\Gamma_C , \quad (2.44)$$

onde  ${}^R t^C$  e  $t^C$  são vetores de tração superficiais aplicados em  ${}^R \Gamma_C$  e  $\Gamma_C$ , respectivamente, pode-se obter a expressão

$$\left( {}^R t_N^C {}^R \mathbf{n} + {}^R t_T^C \right) d^R \Gamma = \left[ t_N^C \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} {}^R \mathbf{n} + {}^R \mathbf{T}_T(t_T^C) \right] d^R \Gamma \quad (2.45)$$

utilizando-se a fórmula de Nanson (SPENCER, 1980)

$$\mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} {}^R \mathbf{n} d^R \Gamma , \quad (2.46)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal saindo da superfície de contato  $\Gamma_C$ ,  ${}^R \mathbf{n}$  é o vetor normal saindo da superfície de contato  ${}^R \Gamma_C$ ,  $\mathbf{F}^{-1}$  é a inversa do gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  (definido em 2.2) e  ${}^R \mathbf{T}_T(t_T^C)$  está na configuração de referência e dependerá da lei de atrito utilizada, no caso do mesmo ser considerado. Diferentes metodologias para solução de problemas de contato já foram estudados, incluindo formulações com a consideração do atrito, que podem ser encontradas em Kikuchi e Oden (1984), Simo e Laursen (1992) e Peric e Owen (1992) entre outros.

A partir das expressões (2.43) a (2.46), pode-se escrever as seguintes relações

$${}^R t_N^C \delta u_N = t_N^C J F_{ij}^{-1} {}^R n_j \delta u_i \quad (2.47a)$$

$${}^R t_T^C \cdot \delta \mathbf{u}_T = {}^R \mathbf{T}_T^C(t_T^C) \cdot \delta \mathbf{u}_T \quad (2.47b)$$

ou, na forma incremental

$$\Delta {}^R t_N^C \delta u_N = \left( \Delta t_N^C J F_{ij}^{-1} + t_N^C \Delta J F_{ij}^{-1} + t_N^C J \Delta F_{ij}^{-1} \right) {}^R n_j \delta u_i \quad (2.48a)$$

$$\Delta {}^R t_T^C \cdot \delta \mathbf{u}_T = \Delta {}^R \mathbf{T}_T^C(t_T^C, \Delta t_T^C) \cdot \delta \mathbf{u}_T \quad (2.48b)$$

Tomando as relações (2.47) e (2.48) e inserindo-as na expressão incremental do princípio dos trabalhos virtuais (2.29) e (2.30) é possível escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \Delta {}^R S_{ij} \delta {}^R E_{ij} + {}^R S_{ij} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^R x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^R x_j} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \Delta {}^R b_i \delta u_i d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_F} \Delta {}^R t_i^F \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \left( \Delta t_N^C J F_{ij}^{-1} + t_N^C \Delta J F_{ij}^{-1} + t_N^C J \Delta F_{ij}^{-1} \right) {}^R n_j \delta u_i d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_C} \Delta {}^R \mathbf{T}_T^C(t_T^C, \Delta t_T^C) \cdot \delta \mathbf{u}_T d\Gamma + R \end{aligned} \quad (2.49)$$

$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0$  sobre  ${}^R \Gamma_D$ , onde

$$\begin{aligned} R &= - \int_{\Omega} S_{ij} \delta E_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} {}^R b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_F} {}^R t_i^F \delta u_i d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_C} t_N^C J F_{ij}^{-1} {}^R n_j \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_C} {}^R \mathbf{T}_T^C(t_N^C) \cdot \delta \mathbf{u}_T d\Gamma \end{aligned} \quad (2.50)$$

Fazendo uso da desigualdade dada por

$$\left(t_N^C + \Delta t_N^C\right) \delta u_N \geq 0 \quad (2.51)$$

a qual é equivalente as condições de contato (2.42), e utilizando-a no contexto da expressão obtida em (2.49) e (2.50), seguindo um processo similar ao apresentado por Kikuchi e Oden (1984), obtém-se a desigualdade variacional

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \Delta^R S_{ij} \delta^R E_{ij} + {}^R S_{ij} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} \right) d\Omega \geq \int_{\Omega} \Delta^R b_i \delta u_i d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_F} \Delta^R t_i^F \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \left( t_N^C J F_{ij}^{-1} - t_N^C \Delta J F_{ij}^{-1} - t_N^C J \Delta F_{ij}^{-1} \right)^R n_j \delta u_i d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_C} \Delta^R \mathbf{T}_T^C(t_T^C, \Delta t_T^C) \cdot \delta \mathbf{u}_T d\Gamma + R . \end{aligned} \quad (2.52)$$

Desprezando o atrito, esta desigualdade poderá ser resolvida utilizando o método da penalidade, o qual inclui as restrições de contato em uma igualdade variacional aproximando a desigualdade acima. Antes de particularizar a formulação aqui apresentada, será discutido o método da penalidade para solução da desigualdade variacional.

## 2.4. Solução da Desigualdade Variacional

Dentre as formas de resolução de um problema que conduz a uma desigualdade variacional optou-se aqui pelo método da penalidade, o qual será apresentado nesta seção, inicialmente com um certo grau de generalidade e posteriormente particularizado para o caso em estudo.

Outra forma comumente utilizada para solução deste tipo de problema é o método dos multiplicadores de Lagrange, onde a introdução de variáveis adicionais no funcional satisfaz a condição de desigualdade. As variáveis introduzidas na solução são os multiplicadores de Lagrange e possuem significado físico associado ao problema. Este método adiciona incógnitas ao problema e ocasiona dificuldades na solução numérica devido ao fato de apresentar zeros na diagonal principal da matriz de rigidez. Outro agravante adicional deste método é que a consistência e a estabilidade da solução do problema recaem sobre a condição de Brezzi-Babuška (CAREY e ODEN, 1983), a qual exige muito esforço matemático para sua aproximação em problemas numéricos.

Como soluções alternativas pode-se mencionar ainda o método Lagrangiano perturbado (SIMO, WRIGGERS e TAYLOR, 1985) ou o método Lagrangiano aumentado (SIMO e LAURSEN, 1992) os quais representam avanços na solução das desigualdades variacionais, uma vez que proporcionam soluções mais eficientes e estáveis (FANCELLO, 1993).

O problema básico que será considerado aqui é o da minimização de um funcional. Seja  $\mathcal{V}$  um espaço reflexivo de Banach com norma  $\|\bullet\|$ ,  $\mathcal{K}$  um subespaço fechado, não vazio e convexo de  $\mathcal{V}$ , i.e.,

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid N_i u_i - g_N \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C\}$$

Seja ainda  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional real definido sobre  $\mathcal{K}$ . Então, encontrar  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$  tal que

$$F(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}} F(\mathbf{v}) \quad [\text{ou } F(\mathbf{u}) \leq F(\mathbf{v})] \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \quad (2.53)$$

Este é o problema de minimização para um funcional  $F$  relativo ao conjunto  $\mathcal{K}$

### 2.4.1. Método da Penalidade

O método da penalidade proporciona uma formulação alternativa para o problema de otimização das restrições evitando a necessidade de se introduzir incógnitas adicionais ao problema. A penalização equivale mecanicamente a introduzir uma equação constitutiva relacionando os deslocamentos e as tensões superficiais na fronteira de contato.

Deseja-se minimizar  $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$  sujeito a restrição de que o minimizador  $\mathbf{u}$  pertence a um conjunto convexo  $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$  ( $\mathcal{K}$  é conjunto convexo se, para quaisquer dois pontos pertencentes a  $\mathcal{K}$  o seguimento conectando estes dois também pertence a  $\mathcal{K}$ ), ou seja, procura-se um minimizador de  $F$  em  $\mathcal{K}$ . De uma forma geral, a idéia do método da penalidade é juntar a  $F$  um funcional de penalidade  $P$  o qual terá seu valor aumentando com a violação da restrição, i.e., quanto mais um candidato a minimizador  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  violar a restrição, maior será a penalidade imposta.

A utilização do método da penalidade para o problema apresentado em (2.53) consiste na introdução de um novo funcional,  $F_\varepsilon$ , o qual depende de um parâmetro real  $\varepsilon > 0$  e é dado por (CAREY e ODEN, 1983; KIKUCHI e ODEN, 1988)

$$F_\varepsilon(\mathbf{u}) = F(\mathbf{v}) + P_\varepsilon(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} P(\mathbf{v}) \quad (2.54)$$

onde  $P: \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$  é o funcional penalidade que satisfaz às seguintes condições:

(i)  $P: \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$  é fracamente semicontínuo por baixo sobre  $\mathcal{V}$ , i.e., para qualquer sequência  $\{\mathbf{u}_s\} \subset \mathcal{V}$  com a propriedade que  $\{\mathbf{u}_s\}$  converge fracamente para  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ , tem-se

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} P(\mathbf{u}_s) \geq P(\mathbf{u}) ; \quad (2.55a)$$

$$(ii) \ P(v) \geq 0, \ P(v) = 0 \text{ se, e somente se, } v \in \mathcal{K}; \quad (2.55b)$$

(iii)  $P$  é  $G$ -diferenciável (ou diferenciável segundo Gâteaux), i.e., existe um funcional linear  $DP(u) \in \mathcal{V}$  ( $\mathcal{V}$  é o espaço dual de  $\mathcal{V}$ ) tal que, para todo  $v \in \mathcal{K}$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \kappa} P(u + \kappa v) = \langle DP(u), v \rangle,$$

onde  $\kappa$  é um número arbitrário positivo e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota a paridade dual sobre  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  (se  $g \in \mathcal{V}$ , escreve-se  $g(v) = \langle g, v \rangle$ ). (2.55c)

Como  $F$  é um funcional definido em todo  $\mathcal{V}$  e tendo em vista as propriedades de  $F$  e  $P$ ,  $F_\varepsilon$  é coercivo e fracamente inferiormente semicontínuo (ODEN e REDDY, 1976; CAREY e ODEN, 1983; KIKUCHI e ODEN, 1988). Portanto, de acordo com o teorema generalizado de minimização de Weierstrass (KIKUCHI e ODEN, 1988), para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma  $u_\varepsilon \in \mathcal{V}$  que minimiza  $F_\varepsilon$

$$\inf_{v \in \mathcal{V}} F_\varepsilon(v) = F_\varepsilon(u_\varepsilon). \quad (2.56)$$

Além disto, se  $F$  e  $P$  são diferenciáveis segundo Gâteaux,  $u_\varepsilon$  é caracterizado por

$$\langle DF(u_\varepsilon), v \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle DP(u_\varepsilon), v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.57)$$

uma vez que  $u_\varepsilon$  minimiza  $F_\varepsilon$ ,

$$F(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} P(u_\varepsilon) \leq F(v) + \frac{1}{\varepsilon} P(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.58)$$

então, se  $v \in \mathcal{K}$ ,  $P(v) = 0$  e como  $(1/\varepsilon)P(u_\varepsilon) \geq 0$ , tem-se

$$F(u_\varepsilon) \leq F(v) \quad \forall v \in \mathcal{K}. \quad (2.59)$$

Finalmente, com base no que foi visto até agora, existe uma subsequência  $\{u_\varepsilon\}$  a qual é fracamente convergente para  $u \in \mathcal{V}$ , onde

$$u \in \mathcal{K} \quad F(u) = \inf_{v \in \mathcal{K}} F(v). \quad (2.60)$$

Além disto, se  $F$  e  $P$  são  $G$ -diferenciáveis, a subsequência  $\{u_\varepsilon\}$  satisfaz (2.57) para todo  $\varepsilon > 0$  e no limite  $u$  satisfaz a desigualdade variacional

$$\langle DF(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}. \quad (2.61)$$

Para ilustrar as idéias apresentadas acima, considerar-se-á o problema de minimização de restrições

$$u \in \mathcal{K} \quad F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in \mathcal{K}, \quad (2.62)$$

onde  $\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{V} \mid Bv - g \leq 0 \text{ em } \Gamma_C\}$ . Aplicando o método da penalidade neste problema, deve-se introduzir inicialmente um funcional penalidade  $P$  satisfazendo as condições (2.55). Uma escolha natural para o funcional penalidade neste caso é

$$P_\varepsilon(v) = \frac{1}{2\varepsilon} \|(Bv - g)^+\|^2, \quad (2.63)$$

onde  $B$  é um operador,  $\| \bullet \|$  é a norma definida sobre  $\Gamma_C$  e  $(\bullet)^+$  a parte positiva de  $(\bullet)$ . Fica claro para esta escolha que as condições (2.55) para o funcional penalidade são satisfeitas. A derivada do funcional penalidade segundo Gâteaux é dada por

$$DP_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} B^*(Bu - g)^+ , \quad (2.64)$$

onde  $B^*$  é a transposta de  $B$ . Esta derivada tem o sentido físico de uma reação de contato na superfície a qual é proporcional à violação da restrição (Figura 2.5).

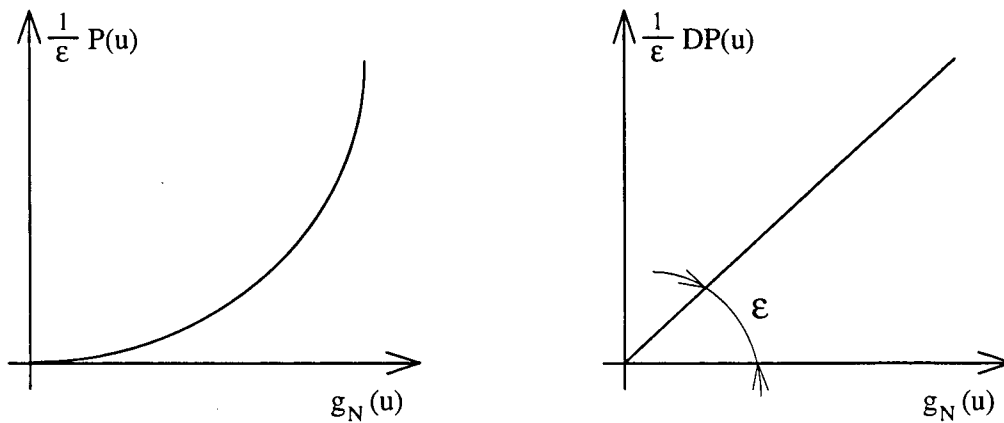


Figura 2.5 Funcional Penalidade e sua derivada.

Assim, de acordo com (2.57), a caracterização correspondente do minimizador de  $F_\varepsilon$  em (2.54) e (2.56) é

$$u_\varepsilon \in \mathcal{U} \quad \langle DF(u_\varepsilon), v \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle (Bu_\varepsilon - g)^+, Bv \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2.65)$$

Quando faz-se uma formulação de elementos finitos utilizando (2.65), apenas a variável  $u_\varepsilon$  será aproximada. Este processo de aproximação é numérico e a escolha do



fator de penalidade  $\varepsilon$  deverá ser feita de forma bastante criteriosa devido ao fato de que a solução (2.65) convergirá para a solução quando  $\varepsilon$  tender à zero. Porém, deve-se tomar cuidado com valores de  $\varepsilon$  muito próximos de zero, pois a solução numérica se tornará inviável. Um estudo dos valores mais indicados de  $\varepsilon$ , bem como uma análise da influência do fator penalidade  $\varepsilon$  para solução de problemas de contato em placas semi-espessas, foi apresentado por Luersen (1994) e Luersen, Barp e Selke (1995).

### 2.4.2. Aplicação ao Princípio dos Trabalhos Virtuais

Para o problema de contato analisado neste trabalho tem-se uma desigualdade que foi apresentada em (2.37) e na sua forma incremental (2.38). Neste caso o conjunto das restrições  $\mathcal{K}$  é definido como

$$\mathcal{K} = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid u_N - g_N \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C \}$$

onde  $\mathcal{V}$  é um espaço de Hilbert que contém as funções admissíveis.

Desprezando-se o atrito, pode-se resolver a desigualdade (2.52) através de uma metodologia similar a apresentada na seção anterior, utilizando o método da penalidade, onde a derivada do funcional de penalização é dada como

$$t_N = -\frac{1}{\varepsilon} (u_N - g_N)^+ \quad (2.66a)$$

ou, em termos incrementais,

$$\Delta t_N = -\frac{1}{\varepsilon} (\Delta u_N - \Delta g_N)^+, \quad (2.66b)$$

onde  $\varepsilon$  é o fator de penalidade e  $(u_N - g_N)^+$  e  $(\Delta u_N - \Delta g_N)^+$  são as partes positivas das restrições de contato penalizadas.

O sentido físico da derivada do funcional penalização é de uma reação de contato na superfície  $\Gamma_C$  representada por  $t_N^C$ , ou na forma incremental  $\Delta t_N^C$ . Por sua vez o termo de penalização pode ser interpretado fisicamente como um conjunto de molas muito rígidas, atuando apenas quando a restrição de contato for violada, sendo a constante de mola dada por  $\varepsilon^{-1}$ .

A existência da solução e a convergência ao problema original, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , foram apresentadas por Kikuchi e Song (1981). Se fosse considerado o atrito, além do método da penalidade, o funcional resultante iria exigir o uso do método da regularidade. Este assunto é tratado com detalhes por Kikuchi e Oden (1984), Torigaki (1989), entre outros.

Com o que foi apresentado acima, o princípio dos trabalhos virtuais em sua forma incremental, aplicando-se o método da penalidade, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \Delta^R S_{ij} \delta^R E_{ij} + {}^R S_{ij} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial^R x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial^R x_j} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \Delta^R b_i \delta u_i d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_F} \Delta^R t_i^F \delta u_i d\Gamma - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_C} J F_{ij}^{-1R} n_j (\Delta u_N - \Delta g_N)^+ \delta u_i d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_C} t_N^C \Delta J F_{ij}^{-1R} n_j \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_C} t_N^C J \Delta F_{ij}^{-1R} n_j \delta u_i d\Gamma + R \end{aligned} \quad (2.67)$$

$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0$  sobre  ${}^R \Gamma_D$ . Utilizando as relações incrementais

$$\Delta J \equiv J \frac{\partial \Delta u_i}{\partial^R x_i}, \quad (2.68a)$$

$$\Delta F_{ij}^{-1} \equiv -F_{ik}^{-1} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial^R x_j}, \quad (2.68b)$$

$$\Delta u_N \equiv n_i \Delta u_i, \quad (2.68c)$$

pois, no momento do contato  $N_i \equiv n_i$ , obtém-se a equação (2.67) escrita como

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left( \Delta^R S_{ij} \delta^R E_{ij} + {}^R S_{ij} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^R x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^R x_j} \right) d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{{}^R \Gamma_C} J F_{ij}^{-1R} n_k \Delta u_k {}^R n_j \delta u_i d\Gamma - \\
 & - \int_{{}^R \Gamma_C} t_N^C J F_{ij}^{-1} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial {}^R x_i} {}^R n_j \delta u_i d\Gamma + \int_{{}^R \Gamma_C} t_N^C J F_{ik}^{-1} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^R x_j} {}^R n_j \delta u_i d\Gamma = \\
 & = \int_{\Omega} \Delta^R b_i \delta u_i d\Omega + \int_{{}^R \Gamma_F} \Delta^R t_i^F \delta u_i d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon} \int_{{}^R \Gamma_C} J F_{ij}^{-1R} n_j \Delta g_N \delta u_i d\Gamma + R \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

$$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0 \text{ sobre } {}^R \Gamma_D.$$

## 2.5. Formulação Lagrangiana Atualizada

Considerando o caso onde a configuração corrente  ${}^1\Omega$  no tempo  $t$  é tomada como a referência  ${}^R\Omega$ , a formulação Lagrangiana anteriormente desenvolvida será chamada formulação Lagrangiana atualizada. Uma vez que os incrementos entre duas configurações vizinhas são pequenos, as seguintes aproximações são válidas

$$J \cong 1$$

$$S_{ij} \cong \sigma_{ij}$$

$$F_{ij}^{-1} \cong \delta_{ij}$$

$$\Delta E_{ij} \cong \delta \varepsilon_{ij}^*$$

$$\Delta S_{ij} \cong \Delta S_{ij}^*$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor tensão de Cauchy,  $\delta \epsilon_{ij}^*$  são as componentes incrementais do tensor deformação linearizado de Green-Lagrange e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Então o princípio dos trabalhos virtuais em sua forma incremental, considerando as restrições de contato, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \Delta_l^R S_{ij}^* \delta_l^R \epsilon_{ij}^* + {}^R \sigma_{ij} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial {}^l x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^l x_j} \right) d\Omega + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_C} {}^R n_i {}^R n_k \Delta u_k \delta u_i d\Gamma = \\ & = \int_{\Omega} \Delta_l^R b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_F} \Delta_l^R t_i^F \delta u_i d\Gamma + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_C} {}^R n_i \Delta g_N \delta u_i d\Gamma + R \end{aligned} \quad (2.70)$$

$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0$  sobre  ${}^R \Gamma_D$ , onde

$$\begin{aligned} R = & - \int_{\Omega} {}^R \sigma_{ij} \delta_l^R \epsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} {}^R b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_F} {}^R t_i^F \delta u_i d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_C} {}^R t_N^C {}^R n_i \delta u_i d\Gamma \end{aligned} \quad (2.71)$$

sendo que as derivadas são em relação às coordenadas da configuração  ${}^l \Omega$ , i.e., em relação à  ${}^l x_i$ . As equações (2.70) e (2.71) são similares às aquelas obtidas por Washizu (1982) para uma formulação lagrangiana atualizada em sua forma incremental sem considerar as restrições de contato. Na equação (2.70) a segunda e quinta parcela são consideradas efetivas, para efeitos de cálculo, somente após a ocorrência do contato.

Na sequência do trabalho a forma incremental dos trabalhos virtuais (2.70) e (2.71) será particularizada para uma placa semi-espessa utilizando uma teoria de placas de ordem superior.

# CAPÍTULO 3

## Formulação do Elemento Finito de Placa de Lo, Christensen e Wu, Sujeito à Grandes Deslocamentos e Contato Unilateral

### 3.1. Introdução

No capítulo anterior foi apresentada a equação do princípio dos trabalhos virtuais na sua forma incremental, caracterizando o uso de uma formulação Lagrangiana atualizada. Neste capítulo, são apresentadas algumas teorias e respectivas descrições cinemáticas, para placas apontando as peculiaridades de cada uma delas. Também é realizada uma análise comparativa entre as teorias de primeira ordem e as teorias de ordem superior, salientando as limitações inerentes às teorias de placas de primeira ordem e justificando a utilização de uma teoria de placas de ordem superior, como uma forma de superar tais limitações, sem o objetivo de cobrir as inúmeras teorias de ordem superior para placas já desenvolvidas. Posteriormente, é feita a particularização do princípio dos trabalhos virtuais, na forma Lagrangiana atualizada incremental, incluindo-se as condições de contato linearizadas, para o caso de placas, utilizando a teoria de ordem superior de Lo, Christensen e Wu para placas. Finalmente, são discretizadas as equações pelo método de elementos finitos, utilizando o elemento isoparamétrico Lagrangiano de nove nós com funções de interpolação quadráticas. São obtidas então as equações de elementos finitos e discutidos alguns aspectos sobre o algoritmo e sobre a solução numérica.

### 3.2. Descrições Cinemáticas para Placas

Uma placa é uma estrutura tridimensional com a peculiaridade de possuir a dimensão transversal, que representa a espessura  $h$  da placa, muito menor que as outras duas dimensões laterais da mesma. Esta característica, peculiar às placas e cascas, torna possível a aproximação de um problema tridimensional por um problema bidimensional, podendo-se fazer a descrição de todo comportamento físico da estrutura em função da superfície de referência da placa. Na formulação do problema, é utilizado um sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$ , onde os eixos  $x$  e  $y$  são coincidentes com o plano que contém a superfície de referência da placa e o eixo  $z$  é tomado na direção da normal à superfície de referência da placa (Figura 3.1). Para o desenvolvimento da formulação numérica expressa-se, matematicamente, o domínio da placa por

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \left[ +\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} \right], (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2 \right\} \quad (3.1)$$

onde  $h$  é a espessura e  $S$  é a superfície de referência da placa.

A obtenção e a aplicação das teorias de placas é uma das áreas em constante desenvolvimento na análise estrutural. Estas teorias estão sendo constantemente aplicadas a novos problemas onde existe crescente necessidade de novas e precisas informações. Assim, modelos cada vez mais sofisticados, visando representar o comportamento de placas, têm sido desenvolvidos. Como por exemplo, as teorias de ordem superior apresentadas por Lo, Christensen e Wu (1977a, 1977b), Kant (1982), Reddy (1984), entre outros, encontrando aplicações em problemas onde a teoria clássica apresentada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e a teoria de primeira ordem apresentada por Reissner (1945, 1947, 1975, 1976) e Mindlin (1951) são inadequadas para descrever o comportamento da placa, nos fenômenos estudados.

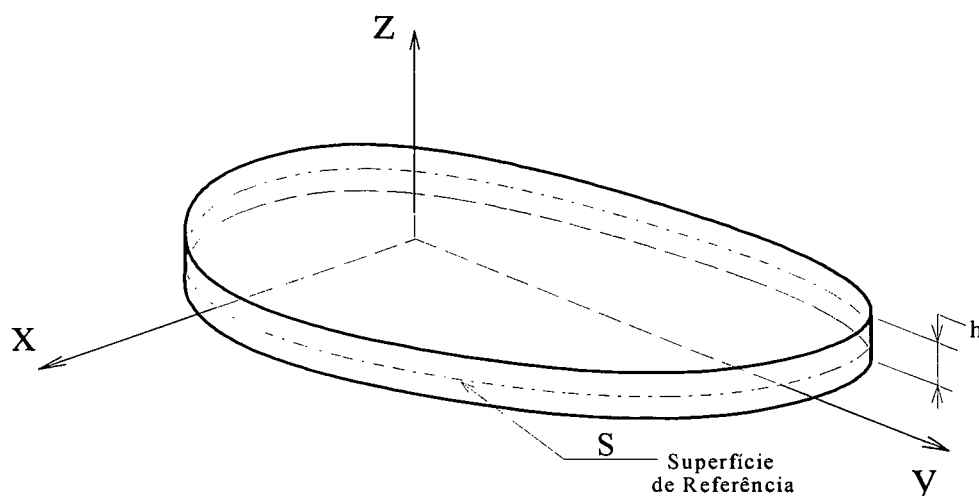


Figura 3.1 Sistema de coordenadas da estrutura tipo placa.

Antes de analisar, particularmente, a teoria de placas de ordem superior de Lo, Christensen e Wu (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a), será feita uma rápida revisão de algumas teorias para posteriormente compará-las com aquela. Estudos mais completos sobre as diversas teorias de ordem superior já foram tema de inúmeras publicações, dentre as quais pode-se citar os trabalhos de Noor e Burton (1989) e o de Smith e Palazotto (1993).

### 3.2.1. Teoria Clássica para Placas Finas

As hipóteses utilizadas no desenvolvimento da teoria clássica de placas são as seguintes:

- (i) A placa é fina, i.e., a relação entre a largura e a espessura da placa, é dada por  $h/\ell \ll 1/10$ ;
- (ii) As deformações e os deslocamentos são pequenos, e especialmente estes quando comparados com a espessura da placa;
- (iii) A tensão normal transversal é desprezável, i.e.,  $\sigma_{zz} \approx 0$ ;

(iv) As normais à superfície de referência indeformada permanecem normais em relação à superfície de referência deformada, e não sofrem variação de comprimento.

A hipótese (iv), conhecida como a hipótese de Kirchhoff, juntamente com as demais hipóteses, é responsável por uma inconsistência fundamental da teoria, que se consubstancia no excesso de condições de contorno. Desta forma, a teoria clássica permite a satisfação de poucas condições de contorno nas arestas das quais são, na verdade, prescritas. A teoria clássica tem seu campo de aplicação restrito aos problemas de placas finas e o campo de deslocamentos, para qualquer ponto  $(x, y, z)$  da placa, é dado, de forma aproximada, por

$$u_x(x, y, z) \cong u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (3.2a)$$

$$u_y(x, y, z) \cong v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (3.2b)$$

$$u_z(x, y, z) \cong w(x, y), \quad (3.2c)$$

onde  $u$  e  $v$  são os deslocamentos axiais sobre a superfície de referência no plano  $x$ - $y$  da placa, na direção das coordenadas axiais  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $w$  é o deslocamento transversal de um ponto sobre o plano  $x$ - $z$  ou  $y$ - $z$  ou de qualquer ponto da placa em relação a superfície de referência da placa no plano  $z=0$ , na direção da coordenada transversal  $z$  e  $\partial w(x, y)/\partial x$  e  $\partial w(x, y)/\partial y$  são as rotações da normal em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente (Figura 3.2).

Observa-se que a imposição simultânea das hipóteses (iii) e (iv) levam a imposição conjunta de um estado plano de tensões e de um estado plano de deformações, sendo que tal situação é absolutamente incompatível dentro da teoria da elasticidade. Devido a este fato, ocorrerá o aparecimento da inconsistência



fundamental, caracterizada pelo aparecimento de condições de contorno em excesso, para a solução da equação diferencial do problema. A correção desta inconsistência é realizada pela contração de condições de contorno, obtendo-se a condição de contorno de Timoshenko.

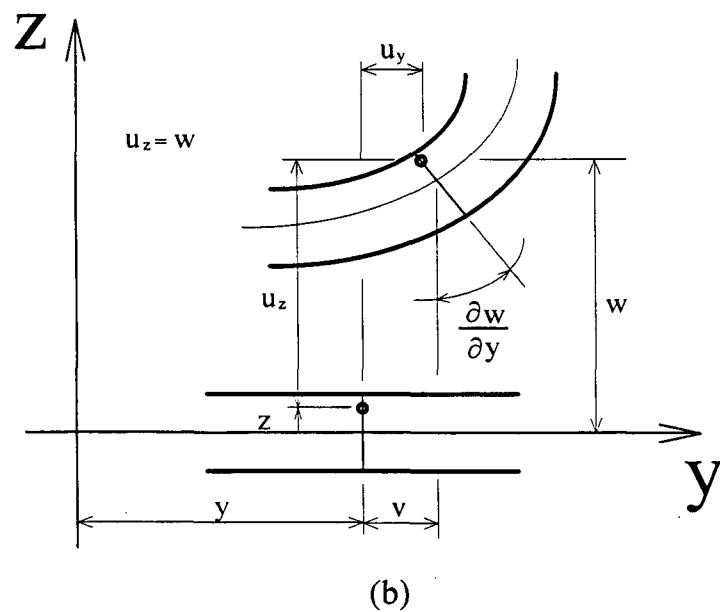
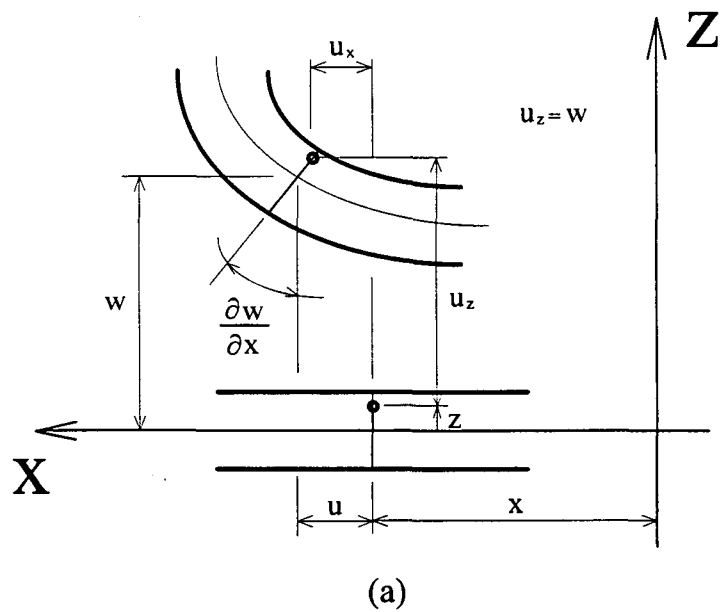


Figura 3.2 Cinemática da teoria clássica para placas.

### 3.2.2. Teoria de Primeira Ordem para Placas Semi-Espessas

As hipóteses utilizadas no desenvolvimento da teoria de placas de primeira ordem são as seguintes:

(i) A placa é semi-espessa, i.e., a relação entre a largura e a espessura da placa, é dada por  $h/\ell < 1/10$ ;

(ii) As deformações e os deslocamentos são pequenos, e especialmente estes quando comparados com a espessura da placa;

(iii) A tensão normal transversal é desprezável, i.e.,  $\sigma_{zz} \approx 0$ ;

(iv) As normais à superfície de referência indeformada não permanecem normais à superfície de referência deformada permanecendo, no entanto, retas e inextensíveis durante o processo de deformação.

A hipótese (i) define a relação largura x espessura para placa semi-espessa. As hipóteses (ii) e (iii) são idênticas às hipóteses adotada para a teoria clássica. A hipótese (iv) apresenta, para a teoria de placa de primeira ordem, uma versão relaxada da hipótese de Kirchhoff da teoria clássica, a qual constitui-se em uma forma aproximada de levar em consideração a deformação cisalhante transversal. Esta consideração consiste na diferença fundamental entre as teorias clássica e de primeira ordem.

A teoria de primeira ordem tem seu campo de aplicação na análise de placas moderadamente espessas, ou semi-espessas. É assim chamada devido ao fato de que os deslocamentos são representados por polinômios lineares em relação a coordenada da espessura  $z$ , tendo seu campo de deslocamentos, para qualquer ponto  $(x, y, z)$  da placa, dado, de forma aproximada, por

$$u_x(x, y, z) \cong u(x, y) + z \theta_x(x, y) \quad (3.3a)$$

$$u_y(x, y, z) \cong v(x, y) + z \theta_y(x, y) \quad (3.3b)$$

$$u_z(x, y, z) \cong w(x, y), \quad (3.3c)$$

onde  $\theta_x(x,y)$  e  $\theta_y(x,y)$  representam as rotações da normal em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente (Figura 3.3). As demais variáveis são de descrição idêntica aquelas da teoria clássica.

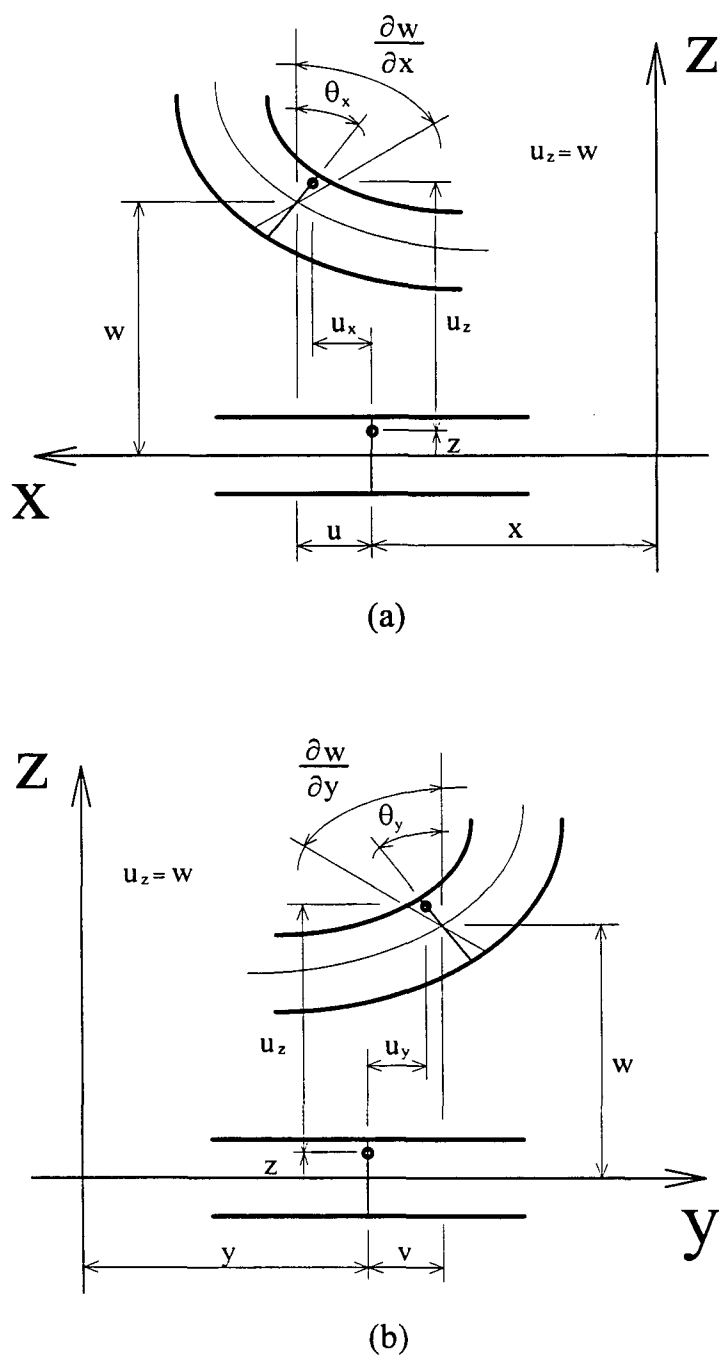


Figura 3.3 Cinemática da teoria de primeira ordem para placas.

A teoria de primeira ordem requer funções de interpolação para os graus de liberdade de rotação  $[\theta_x(x,y)$  e  $\theta_y(x,y)]$  com continuidade  $C^0$ , ao contrário das funções de interpolação com continuidade  $C^1$ , requeridas devido aos graus de liberdade de rotação  $[\partial w(x,y)/\partial x$  e  $\partial w(x,y)/\partial y]$  da teoria clássica.

A partir das definições adotadas, pode-se observar que as tensões cisalhantes transversais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  fornecem valores constantes ao longo da espessura. Este fato caracteriza uma limitação desta teoria, uma vez que, sabe-se que a tensão cisalhante transversal distribui-se de forma parabólica ao longo da espessura da placa (HUGHES e TEZDUYAR, 1981). Nas deduções efetuadas por Mindlin e Reissner, foi necessária a inclusão de um fator de correção da distribuição das tensões cisalhantes transversais para compensar o fato de que estas são constantes ao longo da espessura da placa. Tal fator de correção é aproximado e viola as condições de contorno. Foi calculado através da comparação com a solução exata, apresentada pela teoria da elasticidade tridimensional, e o valor encontrado por Reissner (1945) para o fator de correção das tensões cisalhantes transversais foi de  $5/6$  e o proposto por Mindlin (1951) foi de  $\pi^2/12$ . A teoria de primeira ordem é geralmente denominada teoria de Mindlin-Reissner.

### 3.2.3. Teorias de Ordem Superior para Placas Semi-Espessas

Teorias de placas de ordem superior tem sido pesquisadas ao longo dos anos com o objetivo de representar com maior exatidão os efeitos da deformação cisalhante transversal. Elas tem sido deduzidas tomando-se um número maior de termos na expansão da série de Taylor em relação a coordenada da espessura, i.e., coordenada  $z$ , do que anteriormente utilizado.

Com os recentes desenvolvimentos de placas laminadas compostas, onde a razão entre os módulos de elasticidade ( $E$ ) e de cisalhamento ( $G$ ) é muito grande, as teorias clássica e de primeira ordem tem se mostrado inadequadas para modelagem

destes problemas. Surge assim, a necessidade de teorias que sejam adequadas para modelagem destes problemas com boa precisão e com representação física próxima a realidade.

Inúmeros pesquisadores já desenvolveram diferentes teorias de ordem superior. Neste trabalho, no entanto, serão destacadas a teoria de Lo, Christensen e Wu (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a, 1977b), a teoria de Kant (KANT, 1982) e a teoria de Reddy (REDDY, 1984). Porém, para cada problema particular, é aconselhável que se procure a teoria que irá satisfazer o maior número de requisitos. Um detalhado levantamento das teorias de deformação cisalhante existentes pode ser encontrado no trabalho de Noor e Burton (1989).

### 3.2.3.1. Teoria de Lo, Christensen e Wu

Uma teoria de placas que leve em consideração os efeitos da deformação cisalhante transversal, da deformação normal transversal e da distribuição não-linear dos deslocamentos no plano x-y em relação a coordenada da espessura, i.e., o efeito do empenamento da seção transversal. Com estes objetivos Lo, Christensen e Wu (1977a, 1977b, 1978) introduziram uma teoria de placas de ordem superior onde os deslocamentos axiais possuem uma expansão polinomial cúbica e o deslocamento transversal possui uma expansão polinomial quadrática com relação a coordenada da espessura da placa. Tal campo de deslocamentos, para qualquer ponto (x,y,z) da placa, é dado, de forma aproximada, por

$$u_x(x,y,z) \cong u(x,y) + z \theta_x(x,y) + z^2 u^*(x,y) + z^3 \theta_x^*(x,y) \quad (3.4a)$$

$$u_y(x,y,z) \cong v(x,y) + z \theta_y(x,y) + z^2 v^*(x,y) + z^3 \theta_y^*(x,y) \quad (3.4b)$$

$$u_z(x,y,z) \cong w(x,y) + z \theta_z(x,y) + z^2 w^*(x,y), \quad (3.4c)$$

onde  $u$  e  $v$  são os deslocamentos axiais,  $w$  é o deslocamento transversal de um ponto da superfície de referência,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações cisalhantes em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente,  $\theta_z$  e  $w^*$  são quantidades relacionadas com a deformação da normal ao longo da espessura e  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  são quantidades relacionadas com o empenamento da seção transversal da placa (Figura 3.4).

A teoria de Lo, Christensen e Wu descreve com maior exatidão problemas de flexão de placas com pontos de concentração de tensões, de contato unilateral e de placas laminadas compostas. Adicionalmente, esta teoria não requer nenhum tipo de fator de correção, proporcionando assim, uma melhor satisfação das condições de contorno. Também a normal, inicialmente reta, torna-se curvada após a deformação.

Na formulação do elemento finito baseado nesta teoria são necessárias funções de interpolação de continuidade  $C^0$ , a qual torna a teoria muito atraente devido a simplicidade de implementação e programação, apesar do elevado número de graus de liberdade.

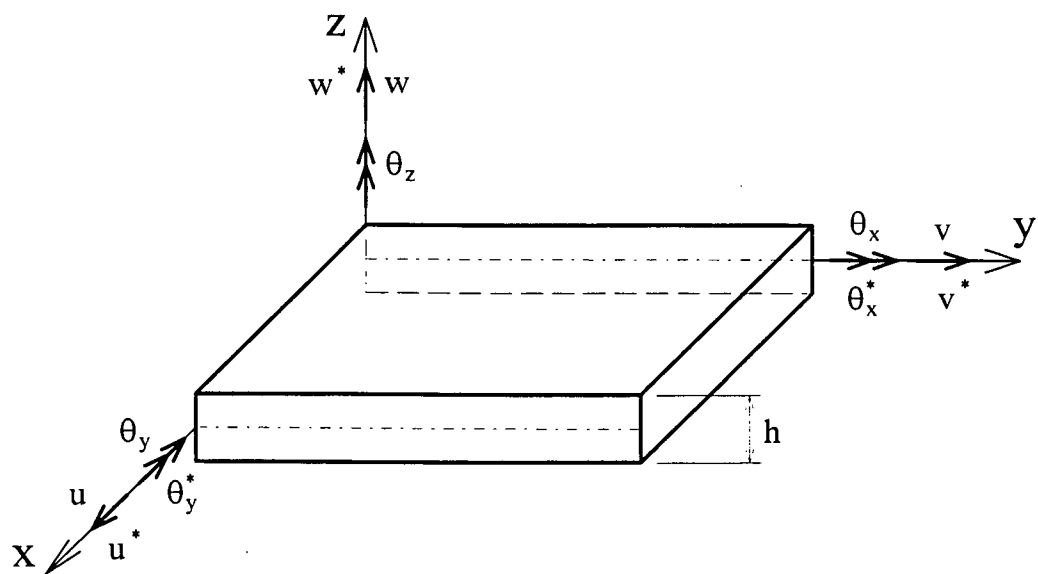


Figura 3.4 Conjunto das componentes do deslocamento.

Finalmente, deve-se questionar a necessidade prática de uma teoria complexa como a teoria (3.4). Esta é uma questão que depende do grau de precisão e de representação física requerida. Como exemplos de problemas que requerem tais teorias, citam-se os problemas que envolvam rápidas flutuações de carregamento com comprimento característico na ordem da espessura da placa, os problemas de delaminação de placas laminadas compostas, os problemas de flexão de placas contra uma fundação rígida prevendo o descolamento do centro da placa após um determinado valor de momento, etc.

### 3.2.3.2. Teoria de Reddy

Uma teoria bidimensional para placas que descreva precisamente o comportamento de placas laminadas procurando manter igualdade entre a precisão e a facilidade de análise. Esta é a teoria proposta por Reddy (REDDY, 1984), a qual leva em consideração uma variação parabólica da deformação cisalhante transversal na espessura, e consequentemente, não existe a necessidade de se utilizar um fator de correção para o cálculo das tensões cisalhantes transversais. A escolha do campo de deslocamentos foi realizada com o objetivo de satisfazer a condição de que as tensões cisalhantes transversais desaparecem nas superfícies da placa e que sejam diferentes de zero em qualquer outro ponto. Para esta teoria o campo de deslocamentos, para qualquer ponto  $(x,y,z)$  da placa, é dado, de forma aproximada, por

$$u_x(x,y,z) \cong u(x,y) + z \left[ \theta_x(x,y) - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \theta_x(x,y) + \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \right) \right] \quad (3.5a)$$

$$u_y(x,y,z) \cong v(x,y) + z \left[ \theta_y(x,y) - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \theta_y(x,y) + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \right) \right] \quad (3.5b)$$

$$u_z(x,y,z) \cong w(x,y), \quad (3.5c)$$

onde  $u$  e  $v$  são os deslocamentos axiais,  $w$  é o deslocamento transversal de um ponto sobre a superfície de referência,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações cisalhantes da normal ao plano de referência em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente. Este campo é deduzido partindo do princípio de que as tensões cisalhantes transversais ( $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ ) desaparecem sobre as superfícies da placa. Devido a esta redução no número de variáveis esta teoria não pode ser aplicada quando modela-se problemas de contato com atrito (SELKE, 1986). Como pode-se observar no campo de deslocamentos (3.5) as contribuições e os efeitos da tensão e deformação normal transversal, i.e.,  $\sigma_{zz}$  e  $\epsilon_{zz}$ , são ignoradas.

A formulação resultante da teoria de Reddy contém derivadas de segunda ordem em relação a deflexão transversal, e conseqüentemente, a formulação de elementos finitos resultante do campo de deslocamentos (3.5) requer o uso de funções de interpolação com continuidade  $C^1$ . A qual resulta em uma formulação de elementos finitos computacionalmente ineficiente e deve ser utilizada com certas restrições.

### 3.2.3.3. Teoria de Kant

Uma teoria que proporcione soluções refinadas e mais realistas para os casos de placas semi-espessas e espessas, placas laminadas compostas, distribuição de tensões próximas a carregamentos concentrados, etc. Para atingir estes objetivos, Kant (1982) apresentou uma teoria que incorpora um campo de deslocamentos de ordem superior, com as seguintes características:

- (i) variação quadrática das deformações cisalhantes transversais ( $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ );
- (ii) variação linear da deformação normal transversal ( $\epsilon_{zz}$ );
- (iii) consideração da lei de Hooke tridimensional.

Tal campo de deslocamentos, para qualquer ponto  $(x,y,z)$  da placa, é dado, de forma aproximada, por

$$u_x(x,y,z) \cong z \theta_x(x,y) + z^3 \theta_x^*(x,y) \quad (3.6a)$$



$$u_y(x, y, z) \cong z \theta_y(x, y) + z^3 \theta_y^*(x, y) \quad (3.6b)$$

$$u_z(x, y, z) \cong w(x, y) + z^2 w^*(x, y), \quad (3.6c)$$

onde  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as usuais rotações da normal ao plano de referência em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente,  $w$  é o deslocamento transversal de um ponto da superfície de referência. Os parâmetros  $w^*$ ,  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  são os termos de ordem superior obtidos na expansão da série de Taylor em relação a  $z$ , definidos na superfície de referência. Segundo Kant e Kommineni (1992) os parâmetros  $w^*$ ,  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  são correspondentes a  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , respectivamente.

Kant, Owen e Zienkiewicz (1982) foram os primeiros a apresentar uma formulação de elementos finitos com funções de continuidade  $C^0$ , baseada em um campo de deslocamentos de ordem superior (3.6), utilizando o estado tridimensional de tensão e de deformação e as hipóteses de pequenos deslocamentos, elasticidade linear, homogeneidade e isotropia. Posteriormente, Pandya e Kant (1988) estenderam este trabalho para placas ortotrópicas.

Deve-se observar que a teoria representada pelo campo de deslocamentos (3.6) representa somente os efeitos para fora da superfície de referência, negligenciando os efeitos sobre o plano.

### 3.3. Justificativa para Utilização de uma Teoria de Placa de Ordem Superior

As teorias citadas na seção anterior podem ser apresentadas, resumidamente, como casos especiais de uma teoria geral baseada no seguinte campo de deslocamentos

$$u_x(x,y,z) = u(x,y) + U(x,y,z)$$

(3.7a)

$$u_y(x,y,z) = v(x,y) + V(x,y,z)$$

(3.7b)

$$u_z(x,y,z) = w(x,y) + W(x,y,z),$$

(3.7c)

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são componentes dos deslocamentos da superfície de referência da placa e  $U$ ,  $V$  e  $W$  são funções de  $z$  que anulam-se quando  $z=0$ . As diferentes teorias acima apresentadas podem ser identificadas, assumindo a dependência funcional de  $U$ ,  $V$  e  $W$  de  $z$  (Tabela 3.1).

Tabela 3.1 Campo de deslocamentos para diferentes teorias de placas.

Teorias		U	V	W
Teoria Clássica		$-z \frac{\partial w}{\partial x}$	$-z \frac{\partial w}{\partial y}$	0
Teoria de Primeira Ordem		$z \theta_x$	$z \theta_y$	0
Teorias de  Ordem  Superior	Lo, Chris- tensen e Wu	$z \theta_x + z^2 u^* + z^3 \theta_x^*$	$z \theta_y + z^2 v^* + z^3 \theta_y^*$	$z \theta_z + z^2 w^*$
	Reddy	$z \theta_x - \frac{4 z^3}{3 h^2} \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$	$z \theta_y - \frac{4 z^3}{3 h^2} \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$	0
	Kant ††	$z \theta_x + z^3 \theta_x^*$	$z \theta_y + z^3 \theta_y^*$	$z^2 w^*$

†† Para a teoria de Kant tem-se a peculiaridade de que  $u(x,y)=0$  e  $v(x,y)=0$  em (3.7a) e (3.7b), respectivamente.

Sabe-se de longa data que a teoria clássica para placas finas (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959) baseada na chamada hipótese de Kirchhoff, é

computacionalmente ineficiente quando considera-se uma formulação simples de elementos finitos (ZIENKIEWICZ, 1977; COOK, MALKUS e PLESHA, 1988). Além disto, juntamente com as demais hipóteses simplificadoras, a teoria clássica omite os efeitos da deformação e tensão cisalhante transversal e da deformação e tensão normal transversal.

Inúmeras aproximações foram propostas para levar em consideração o efeito da deformação cisalhante transversal. Com este objetivo, Reissner (1945) e Mindlin (1951) foram os pioneiros no estudo da teoria de primeira ordem a qual, baseada em uma variação linear dos deslocamentos no plano e constante do deslocamento transversal na coordenada  $z$ , resulta na deformação e tensão cisalhante transversal constante e na omissão da deformação e tensão normal transversal. Luersen (1994) apresentou uma formulação de elementos finitos com contato unilateral utilizando o campo de deslocamentos da teoria de primeira ordem.

Basicamente, tanto a teoria clássica quanto a de primeira ordem podem ser formuladas pelo método de elementos finitos exigindo graus de continuidade  $C^1$  e  $C^0$ , respectivamente. Contudo tais formulações possuem certas limitações, tais como:

(i) a deformação e tensão cisalhante transversal, desprezadas na teoria clássica, são constantes na teoria de primeira ordem necessitando de um fator de correção artificial para levar em conta o empenamento da seção transversal. A validade desta formulação depende fortemente do fator de correção utilizado, especialmente se a placa modelada for laminada;

(ii) a deformação e tensão normal transversal, i.e.,  $\epsilon_{zz}$  e  $\sigma_{zz}$ , não são levadas em consideração em ambas teorias.

Atualmente, devido ao crescente uso de materiais laminados e compostos, especialmente na indústria aeroespacial e automotiva, atraídas pelas excelentes propriedades mecânicas destes materiais, torna-se cada vez mais importante uma análise confiável dos modos de fratura e falha. A análise destes modos é, normalmente, extremamente complexa. Dentre estes, pode-se destacar, o fenômeno da delaminação de placas laminadas como o modo de falha mais crítico. Para determinar

o início e o desenvolvimento do processo de delaminação dever-se-á conhecer as tensões cisalhantes transversais interlaminares ( $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ ) e a tensão normal transversal interlaminar ( $\sigma_{zz}$ ).

Com o objetivo de se alcançar a confiabilidade desejada, evitando as anomalias e inconsistências das teorias clássica e de primeira ordem, existem inúmeras teorias de ordem superior. Basicamente três atributos variam para dar origem à diferentes teorias de ordem superior, são eles:

- (i) a ordem da expansão utilizada na espessura;
- (ii) a ordem do campo de deslocamentos assumido (Figura 3.5a);

Estas teorias fornecem soluções mais refinadas e realistas para os casos de placas espessas e semi-espessas, distribuições de tensões próximas a carregamento concentrado, placas laminadas e compostas, placas sujeitas a restrições unilaterais, etc. e são, comparativamente, menos flexíveis do que as teorias clássica e de primeira ordem (KANT, 1982). Ainda é importante notar que as teorias de ordem superior incorporam as seguintes propriedades:

- (i) Variação quadrática das deformações cisalhantes transversais ( $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ ) na espessura da placa, tornando completamente desnecessário a introdução do fator de correção artificial para corrigir a distribuição das tensões de cisalhamento (Figura 3.5b);

- (ii) Variação linear da deformação normal transversal ( $\epsilon_{zz}$ ) na espessura da placa;

- (iii) Consideração da Lei de Hooke generalizada tridimensional.

Para desenvolvimento do presente trabalho, foi adotada a teoria de Lo, Christensen e Wu (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a, 1977b), com campo de deslocamentos dado na equação (3.4), por ser a teoria mais completa das apresentadas. Através dela é possível representar os deslocamentos axiais, o deslocamento transversal, as rotações cisalhantes em x e y, a deformação da normal na espessura da placa e o empenamento da seção transversal.

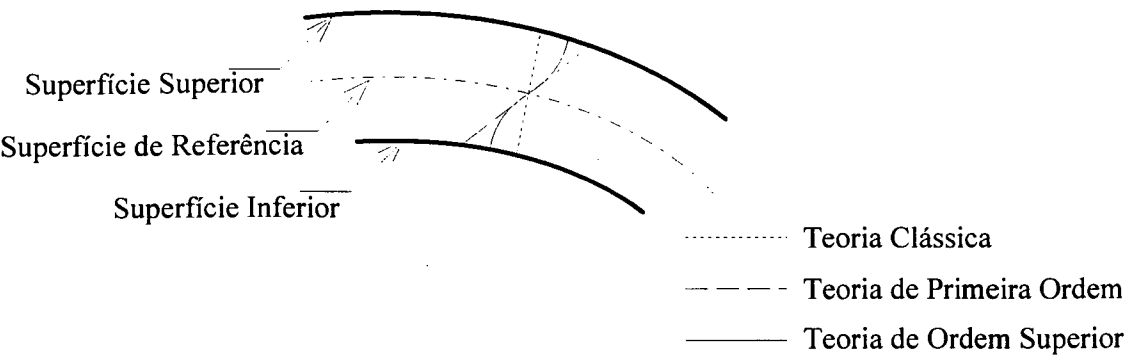


Figura 3.5a Representação do campo de deslocamentos para placas.

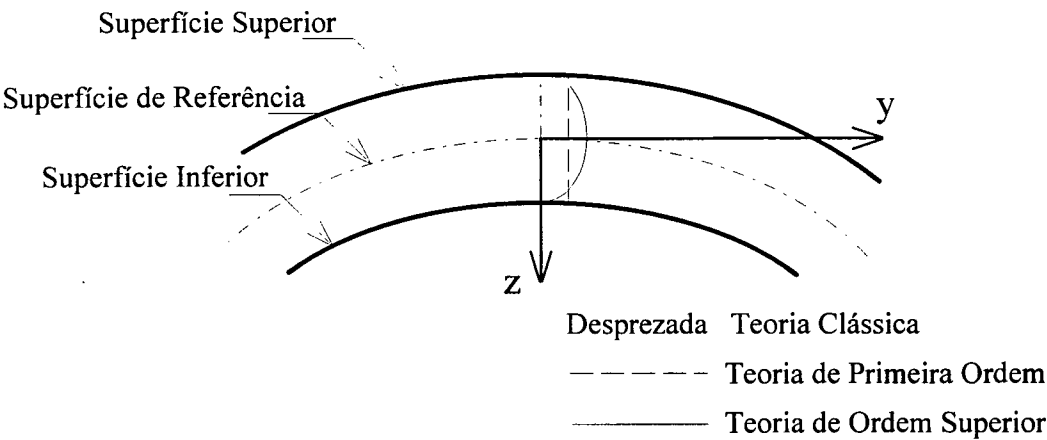


Figura 3.5b Representação da deformação cisalhante transversal para placas.

A teoria de Reddy (REDDY, 1984) não foi adotada neste trabalho por incorporar derivadas de segunda ordem, as quais exigem funções de interpolação com continuidade  $C^1$  e por ignorar os efeitos da tensão e deformação normal transversal ( $\sigma_{zz}$  e  $\varepsilon_{zz}$ ).

A vantagem prática no uso de uma teoria de ordem superior, com onze graus de liberdade, sobre uma teoria clássica ou de primeira ordem, com cinco graus de liberdade, não é muito evidente para placas isotrópicas e homogêneas. Porém, tais vantagens ficam efetivamente evidentes na análise de placas não-homogêneas, laminadas compostas, “sandwich”, anisotrópicas ou ortotrópicas entre outras. No caso de placas homogêneas, o interesse está na modelagem de problemas de contato.

### 3.4. Relações Incrementais Deformação-Deslocamento

As relações deformação-deslocamento, da elasticidade tridimensional, representadas pelo uso do tensor deformação de Green-Lagrange em sua forma linearizada (2.14) são dadas por

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.8)$$

com cada um de seus componentes, utilizando o campo de deslocamentos da teoria de placas de ordem superior de Lo, Christensen e Wu (3.4), sendo apresentados como

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial u^*}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \quad (3.9a)$$

$$\varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial v^*}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} \quad (3.9b)$$

$$\varepsilon_{zz}^* = \theta_z + 2 z w^* \quad (3.9c)$$

$$\gamma_{xy}^* = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + z^2 \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) + z^3 \left( \frac{\partial \theta_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x} \right) \quad (3.9d)$$

$$\gamma_{xz}^* = \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + z \left( 2 u^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) + z^2 \left( 3 \theta_x^* + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) \quad (3.9e)$$

$$\gamma_{yz}^* = \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + z \left( 2 v^* + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right) + z^2 \left( 3 \theta_y^* + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right). \quad (3.9f)$$

Ao escrever a forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais para teoria de Lo, Christensen e Wu de placas, utiliza-se as relações incrementais de deformação-deslocamento, onde é utilizada a forma incremental do campo de deslocamentos (3.4) dada por

$$\Delta u_x(x, y, z) = \Delta u(x, y) + z \Delta \theta_x(x, y) + z^2 \Delta u^*(x, y) + z^3 \Delta \theta_x^*(x, y) \quad (3.10a)$$

$$\Delta u_y(x, y, z) = \Delta v(x, y) + z \Delta \theta_y(x, y) + z^2 \Delta v^*(x, y) + z^3 \Delta \theta_y^*(x, y) \quad (3.10b)$$

$$\Delta u_z(x, y, z) = \Delta w(x, y) + z \Delta \theta_z(x, y) + z^2 \Delta w^*(x, y), \quad (3.10c)$$

e as relações deformação-deslocamento incrementais são escritas como

$$\Delta \epsilon_{xx}^* = \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + z \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \Delta u^*}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \Delta \theta_x^*}{\partial x} \quad (3.11a)$$

$$\Delta \epsilon_{yy}^* = \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + z \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \Delta v^*}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \Delta \theta_y^*}{\partial y} \quad (3.11b)$$

$$\Delta \epsilon_{zz}^* = \Delta \theta_z + 2 z \Delta w^* \quad (3.11c)$$

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_{xy}^* = & \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right) + z \left( \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) + z^2 \left( \frac{\partial \Delta u^*}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v^*}{\partial y} \right) + \\ & + z^3 \left( \frac{\partial \Delta \theta_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y^*}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.11d)$$

$$\Delta \gamma_{xz}^* = \left( \Delta \theta_x + \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) + z \left( 2 \Delta u^* + \frac{\partial \Delta \theta_z}{\partial x} \right) + z^2 \left( 3 \Delta \theta_x^* + \frac{\partial \Delta w^*}{\partial x} \right) \quad (3.11e)$$

$$\Delta \gamma_{yz}^* = \left( \Delta \theta_y + \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) + z \left( 2 \Delta v^* + \frac{\partial \Delta \theta_z}{\partial y} \right) + z^2 \left( 3 \Delta \theta_y^* + \frac{\partial \Delta w^*}{\partial y} \right). \quad (3.11f)$$

As relações virtuais de deformação-deslocamento, i.e.,  $\delta\epsilon_{xx}^*$ ,  $\delta\epsilon_{yy}^*$ ,  $\delta\epsilon_{zz}^*$ ,  $\delta\gamma_{xy}^*$ ,  $\delta\gamma_{xz}^*$  e  $\delta\gamma_{yy}^*$ , são escritas de forma análoga a equação (3.11) substituindo o incremento  $\Delta$  pela variação  $\delta$ .

As equações acima mostram características distintas das relações obtidas com a teoria de primeira ordem. Aqui pode-se observar claramente que as componentes de deformações axiais e cisalhante no plano variam cubicamente ao invés de linearmente em  $z$  e as deformações normal e cisalhante transversais variam linear e quadraticamente ao invés de zero e constante em  $z$ . As relações apresentadas em (3.11) são mais realistas e também eliminam a necessidade do fator de correção.

### 3.5. Relações Constitutivas Incrementais

Considera-se agora a relação constitutiva incremental, que será utilizada na forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais da formulação lagrangiana atualizada do problema de placa de Lo, Christensen e Wu, escrita como

$$\Delta S_{ij}^* \cong C_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}^* , \quad (3.12)$$

onde  $\Delta S_{ij}^*$  é o segundo tensor tensão incremental de Piola-Kirchhoff,  $\Delta \epsilon_{kl}^*$  é o tensor deformação incremental de Green-Lagrange linearizado e  $C_{ijkl}$  é o tensor elástico constante utilizado na maioria das aplicações de materiais elásticos.

Como já foi visto, para a formulação com a teoria de Lo, Christensen e Wu, torna-se necessário o uso de um tensor elástico tridimensional, i.e., o uso da lei de Hooke generalizada, o qual é dado por (BATHE, 1982)

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) , \quad (3.13)$$



onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kroneker e  $\lambda$  e  $G$  são as chamadas constantes de Lamè, da elasticidade linear (BORESI, 1974), dadas por

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.14a)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (3.14b)$$

e onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Desta forma, as relações constitutivas incremental para materiais elásticos e isotrópicos podem ser escritas como

$$\Delta S_{xx}^* = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[ (1 - \nu) \Delta \epsilon_{xx}^* + \nu \Delta \epsilon_{yy}^* + \nu \Delta \epsilon_{zz}^* \right] \quad (3.15a)$$

$$\Delta S_{yy}^* = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[ \nu \Delta \epsilon_{xx}^* + (1 - \nu) \Delta \epsilon_{yy}^* + \nu \Delta \epsilon_{zz}^* \right] \quad (3.15b)$$

$$\Delta S_{zz}^* = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[ \nu \Delta \epsilon_{xx}^* + \nu \Delta \epsilon_{yy}^* + (1 - \nu) \Delta \epsilon_{zz}^* \right] \quad (3.15c)$$

$$\Delta S_{xy}^* = \frac{E}{2(1 + \nu)} \Delta \gamma_{xy}^* \quad (3.15d)$$

$$\Delta S_{xz}^* = \frac{E}{2(1 + \nu)} \Delta \gamma_{xz}^* \quad (3.15e)$$

$$\Delta S_{yz}^* = \frac{E}{2(1 + \nu)} \Delta \gamma_{yz}^* \quad (3.15f)$$

### 3.6. Forma Incremental do Princípio dos Trabalhos Virtuais

A expressão generalizada para o princípio dos trabalhos virtuais na sua forma lagrangiana dada em (2.49) e (2.50) foi modificada, utilizando-se o método da penalidade para resolver o problema das condições de contato, resultando nas expressões (2.70) e (2.71). Considerando o princípio dos trabalhos virtuais em sua forma lagrangiana atualizada para o caso da placa de Lo, Christensen e Wu e separando a integral no domínio  $\Omega$  em uma integral na espessura de  $-h/2$  a  $h/2$ , e outra integral na superfície de referência  ${}^R S$  da placa, tem-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{{}^R S} \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \Delta_1^R S_{ij}^* \delta_1^R \varepsilon_{ij}^* + {}^R \sigma_{ij} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} \right) dz dS + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{{}^R \Gamma_C} n_i {}^R n_k \Delta u_k \delta u_i d\Gamma = \int_{{}^R S} \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta_1^R b_i \delta u_i dz dS + \\
 & + \int_{{}^R \Gamma_F} \Delta_1^R t_i^F \delta u_i d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon} \int_{{}^R \Gamma_C} n_i \Delta g_N \delta u_i d\Gamma + R
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0$  sobre  ${}^R \Gamma_D$ , onde

$$\begin{aligned}
 R = & - \int_{{}^R S} \int_{-h/2}^{+h/2} {}^R \sigma_{ij} \delta_1^R \varepsilon_{ij}^* dz dS + \int_{{}^R S} \int_{-h/2}^{+h/2} {}^R b_i \delta u_i dz dS + \\
 & + \int_{{}^R \Gamma_F} t_i^F \delta u_i d\Gamma + \int_{{}^R \Gamma_C} t_N^C {}^R n_i \delta u_i d\Gamma,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

e onde  $n_i$  são as componentes do vetor normal exterior a superfície de contato  ${}^R \Gamma_C$ .

A integração ao longo da espessura, na direção  $z$ , foi realizada analiticamente, sendo possível se trabalhar com tensões e momentos incrementais resultantes, definidas em relação a superfície de referência da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta N_{xx} & \Delta N_{yy} & \Delta N_{zz} & \Delta N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{xx} & \Delta \sigma_{yy} & \Delta \sigma_{zz} & \Delta \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (3.18a)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta M_{xx} & \Delta M_{yy} & \Delta M_{zz} & \Delta M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{xx} & \Delta \sigma_{yy} & \Delta \sigma_{zz} & \Delta \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (3.18b)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta N_{xx}^* & \Delta N_{yy}^* & \Delta N_{xy}^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{xx} & \Delta \sigma_{yy} & \Delta \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (3.18c)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta M_{xx}^* & \Delta M_{yy}^* & \Delta M_{xy}^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} z^3 \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{xx} & \Delta \sigma_{yy} & \Delta \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (3.18d)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_x & \Delta Q_y \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \Delta \tau_{xz} & \Delta \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (3.18e)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta S_x & \Delta S_y \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \begin{bmatrix} \Delta \tau_{xz} & \Delta \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (3.18f)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_x^* & \Delta Q_y^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \begin{bmatrix} \Delta \tau_{xz} & \Delta \tau_{yz} \end{bmatrix} dz, \quad (3.18g)$$

onde  $\begin{bmatrix} \Delta N_{xx} & \Delta N_{yy} & \Delta N_{zz} & \Delta N_{xy} & \Delta N_{xx}^* & \Delta N_{yy}^* & \Delta N_{xy}^* \end{bmatrix}$  são as tensões resultantes incrementais de membrana,  $\begin{bmatrix} \Delta M_{xx} & \Delta M_{yy} & \Delta M_{zz} & \Delta M_{xy} & \Delta M_{xx}^* & \Delta M_{yy}^* & \Delta M_{xy}^* \end{bmatrix}$  são os momentos resultantes incrementais de flexão e  $\begin{bmatrix} \Delta Q_x & \Delta Q_y & \Delta S_x & \Delta S_y & \Delta Q_x^* & \Delta Q_y^* \end{bmatrix}$  são as tensões resultantes incrementais de cisalhamento, aqui observa-se novamente a

ausência do fator de correção para a distribuição destas tensões, o qual é comum quando se utiliza a teoria de placa de primeira ordem. As figuras (3.6a) e (3.6b) mostram uma representação gráfica de algumas tensões e momentos resultantes definidos em (3.18) (KANT, 1982).

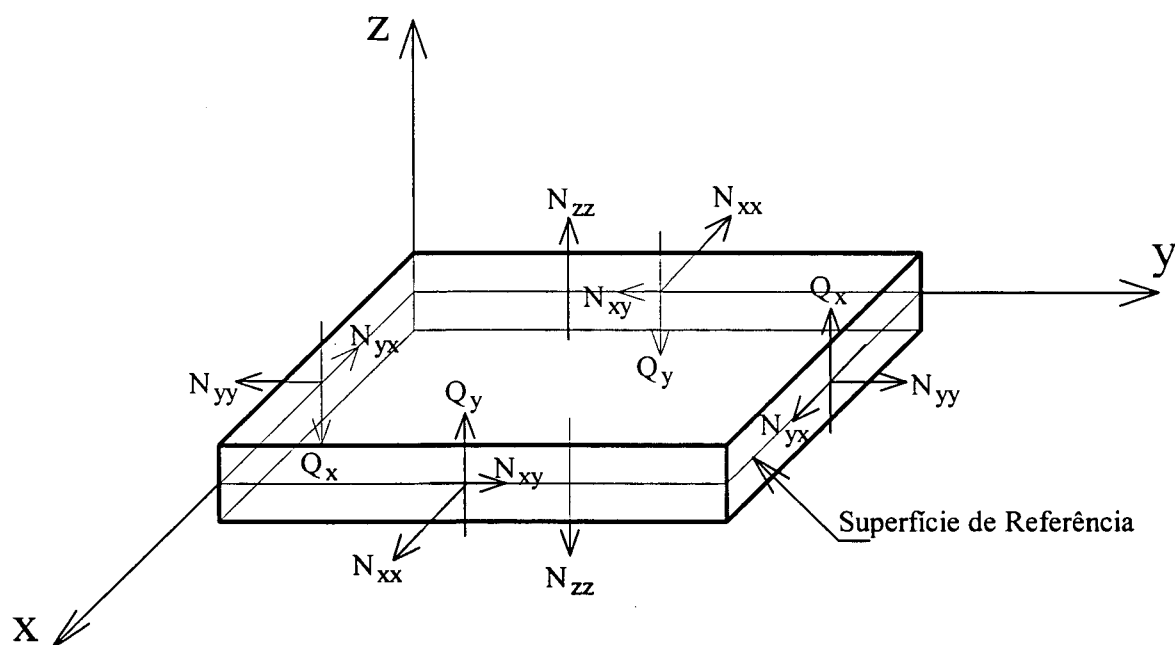


Figura 3.6a Tensões resultantes de membrana, cisalhamento e normal transversal.

Neste momento surge a seguinte questão sobre a formulação de elementos finitos utilizando a teoria de ordem superior: Qual é o significado das tensões incrementais resultantes de membrana, de flexão e de cisalhamento assinaladas com asterisco (\*)?

Em resposta a esta questão pode-se inicialmente dizer que as tensões resultantes assinaladas com asterisco (\*) aparecem na formulação devido a aplicação dos princípios variacionais em um campo de deslocamentos de ordem superior. Além disto, estas tensões resultantes assinaladas com asterisco (\*) na formulação são, na verdade, de difícil entendimento e, definitivamente, não são quantidades com interpretação física direta. Todavia, as tensões resultantes assinaladas com asterisco

(\*) exercem influência sobre as tensões resultantes não assinaladas com asterisco, as quais possuem significado físico direto, e desta forma elas influenciam indiretamente o comportamento da placa (KANT, 1994).

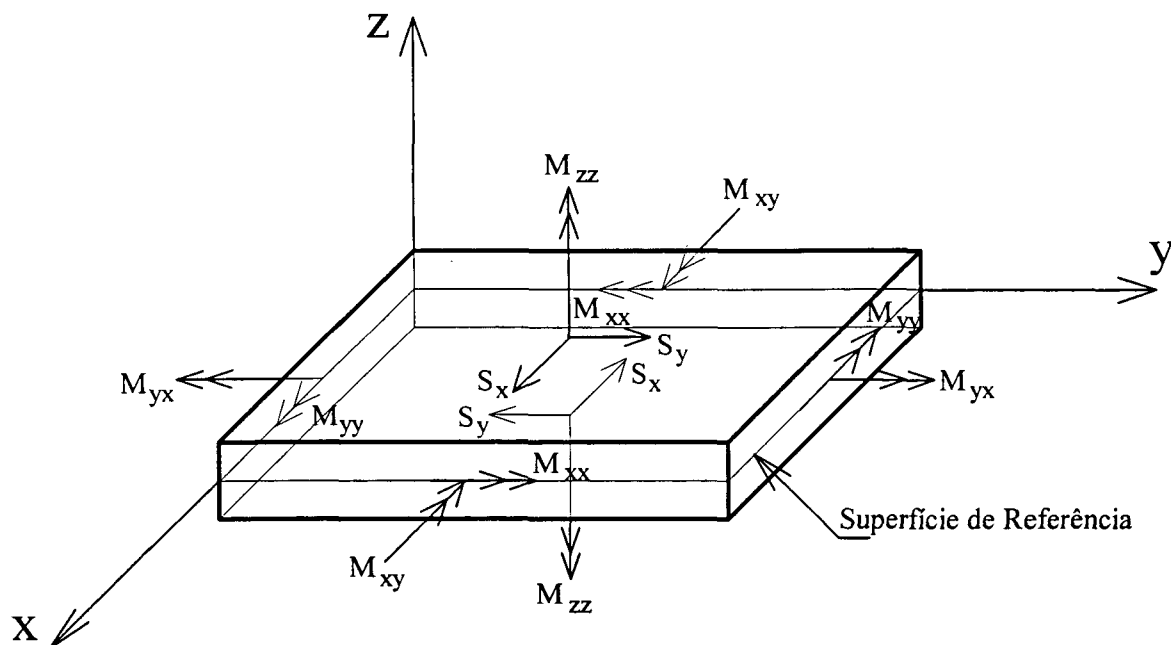


Figura 3.6b Momentos resultantes e outras tensões resultantes.

### 3.7. Matriz de Rigidez e Vetor Carga do Elemento Finito

A forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais escrito em termos dos deslocamentos incrementais e virtuais é obtida após a substituição das relações constitutivas incrementais (3.15) e das relações deformação-deslocamento em suas formas incremental (3.11) e virtual nas equações (3.16) e (3.17). Deve-se observar que todas estas relações devem estar escritas em termos dos deslocamentos incrementais e virtuais.

A integração sobre o domínio  ${}^1\Omega$  foi dividida em uma integração sobre a superfície de referência  ${}^1S$  na configuração indeformada e em uma integração na espessura  $h$  da placa. Assim, o tensor constitutivo constante, para material elástico e isotrópico, integrado ao longo da espessura resulta em

$$D_{ijrs}^k = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{ijrs} z^k dz, \quad (3.19)$$

sendo as tensões resultantes de Cauchy definidas por

$$\sigma_{ij}^k = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} z^k dz. \quad (3.20)$$

Por outro lado, nos termos envolvendo integrais sobre o contorno de contato  ${}^1\Gamma_C$ , as seguintes quantidades são definidas

$$H_{ij}^k = [n_i n_j z^k]_{z \in \Gamma_c} \quad (3.21a)$$

$$J_i^k = [\Delta g_N n_i z^k]_{z \in \Gamma_c} \quad (3.21b)$$

$$I_i^k = [t_N^C n_i z^k]_{z \in \Gamma_c}. \quad (3.21c)$$

Considera-se agora que a superfície de referência  ${}^1S$  da placa seja dividida em um número de  $E$  elementos finitos  ${}^1S_e$ . Dentro de cada elemento finito  ${}^1S_e$ , os deslocamentos nodais incremental e virtual serão interpolados, ou seja,<sup>(1)</sup>

---

<sup>(1)</sup> Utilizar-se-á neste trabalho a convenção de Einstein, onde os índices latinos variam de 1 a 3 e os índices gregos variam de 1 a 2.

$$\Delta^1 u_\alpha = N_1^1(x, y) \Delta^1 u_{\alpha I} \quad \delta^1 u_\alpha = N_1^1(x, y) \delta^1 u_{\alpha I} \quad (3.22a)$$

$$\Delta^1 w = N_1^2(x, y) \Delta^1 w_I \quad \delta^1 w = N_1^2(x, y) \delta^1 w_I \quad (3.22b)$$

$$\Delta^1 \theta_\alpha = N_1^3(x, y) \Delta^1 \theta_{\alpha I} \quad \delta^1 \theta_\alpha = N_1^3(x, y) \delta^1 \theta_{\alpha I} \quad (3.22c)$$

$$\Delta^1 \theta_z = N_1^4(x, y) \Delta^1 \theta_{zI} \quad \delta^1 \theta_z = N_1^4(x, y) \delta^1 \theta_{zI} \quad (3.22d)$$

$$\Delta^1 u_\alpha^* = N_1^5(x, y) \Delta^1 u_{\alpha I}^* \quad \delta^1 u_\alpha^* = N_1^5(x, y) \delta^1 u_{\alpha I}^* \quad (3.22e)$$

$$\Delta^1 w^* = N_1^6(x, y) \Delta^1 w_I^* \quad \delta^1 w^* = N_1^6(x, y) \delta^1 w_I^* \quad (3.22f)$$

$$\Delta^1 \theta_\alpha^* = N_1^7(x, y) \Delta^1 \theta_{\alpha I}^* \quad \delta^1 \theta_\alpha^* = N_1^7(x, y) \delta^1 \theta_{\alpha I}^* , \quad (3.22g)$$

onde  $N_1^n(x, y) = N_1(x, y)$ ,<sup>(2)</sup> devido ao fato de utilizar-se o mesmo conjunto de funções de interpolação para todos graus de liberdade,  $I$  variando de 1 a 9, são as funções de interpolação do elemento finito isoparamétrico Lagrangiano de nove nós (PICA, WOOD E HINTON, 1980) dadas por:

i ) Modos de vértice:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1) (\eta - 1) \quad (3.23a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta - 1) \quad (3.23b)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta + 1) \quad (3.23d)$$

---

(2) Não confundir as funções de interpolação  $N_1(x, y)$  com as componentes do vetor normal unitário  $N_i$ .

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1) (\eta + 1) ; \quad (3.23d)$$

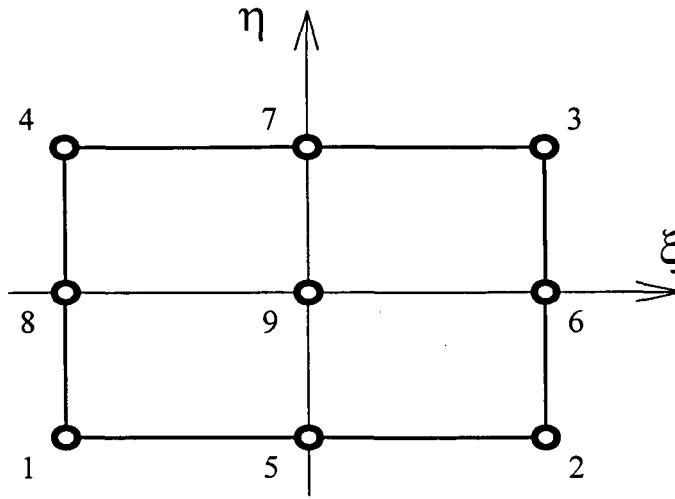


Figura 3.7 Sistema de coordenadas do elemento isoparamétrico mestre de 9 nós.

ii ) Modos de lado:

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta - 1) \quad (3.23e)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) (1 - \eta^2) \quad (3.23f)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta + 1) \quad (3.23g)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (1 - \eta^2) ; \quad (3.23h)$$

iii ) Modos internos:

$$N_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) , \quad (3.23i)$$



onde  $\xi$  e  $\eta$  são coordenadas intrínsecas do sistema do elemento mestre (Figura 3.7).

Pela definição de elemento finito isoparamétrico tem-se que as mesmas funções de interpolação (3.23), utilizadas para interpolar os deslocamentos incrementais e virtuais (3.22), deverão ser utilizadas para interpolar a geometria do elemento, i. e.,

$$x = N_I x_I \quad (3.24a)$$

$$y = N_I y_I, \quad (3.24b)$$

onde  $x_I$  e  $y_I$ , representam as coordenadas nodais. Desta forma, os valores de  $x$  e  $y$  de um ponto dentro do elemento serão interpolados em termos dos valores nodais  $x_I$  e  $y_I$ , quando as coordenadas intrínsecas do ponto interno são dadas (KARDESTUNCER, 1987).

Quando as equações (3.22) são introduzidas na expressão da forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais equações (3.16) e (3.17), escrito em termos dos deslocamentos incrementais e virtuais, obtêm-se a equação de elementos finitos com a seguinte forma

$$\sum_{e=1}^E \left\{ \delta u_{\alpha I} \quad \delta w_I \quad \delta \theta_{\alpha I} \quad \delta \theta_{zI} \quad \delta u_{\alpha I}^* \quad \delta w_I^* \quad \delta \theta_{\alpha I}^* \right\} [K_{\alpha I \gamma J}] \left\{ \begin{array}{c} \Delta u_{\gamma J} \\ \Delta w_J \\ \Delta \theta_{\gamma J} \\ \Delta \theta_{zJ} \\ \Delta u_{\gamma J}^* \\ \Delta w_J^* \\ \Delta \theta_{\gamma J}^* \end{array} \right\} = \sum_{e=1}^E \left\{ \delta u_{\alpha I} \quad \delta w_I \quad \delta \theta_{\alpha I} \quad \delta \theta_{zI} \quad \delta u_{\alpha I}^* \quad \delta w_I^* \quad \delta \theta_{\alpha I}^* \right\} \left\{ \Delta f_{\alpha I} \right\}. \quad (3.25)$$

Sabe-se que os deslocamentos virtuais são arbitrários. Portanto, pode-se escrever a expressão global para placa como

$$[K^G] \{\Delta U^G\} = \{\Delta F^G\} \quad (3.26)$$

onde  $[K^G]$  é a matriz incremental de rigidez global e  $\{\Delta F^G\}$  é o vetor incremental do carregamento global da estrutura. A expressão global de toda estrutura (3.26) é resultado de um processo de superposição das matrizes de rigidez e vetores de carregamento incrementais referente a cada elemento finito (ZIENKIEWICZ, 1977; KARDESTUNCER, 1987).

Considerar-se a expressão (3.25) como sendo a equação para um elemento finito, reescrita aqui por

$$[K_{\alpha I \gamma J}] \{\Delta u_{\gamma J}\} = \{\Delta f_{\alpha I}\} \quad (3.27)$$

onde  $[K_{\alpha I \gamma J}]$  é a matriz de rigidez de elemento, a qual poderá também ser escrita como,

$$[K_{\alpha I \gamma J}] = \begin{bmatrix} K_{\alpha I \gamma J}^{u_\alpha u_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{u_\alpha w} & K_{\alpha I \gamma J}^{u_\alpha \theta_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{u_\alpha \theta_z} & K_{\alpha I \gamma J}^{u_\alpha \dot{u}_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{u_\alpha \dot{w}} & K_{\alpha I \gamma J}^{u_\alpha \dot{\theta}_\gamma} \\ K_{\alpha I \gamma J}^{w u_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{w w} & K_{\alpha I \gamma J}^{w \theta_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{w \theta_z} & K_{\alpha I \gamma J}^{w \dot{u}_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{w \dot{w}} & K_{\alpha I \gamma J}^{w \dot{\theta}_\gamma} \\ K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_\alpha u_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_\alpha w} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_\alpha \theta_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_\alpha \theta_z} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_\alpha \dot{u}_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_\alpha \dot{w}} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_\alpha \dot{\theta}_\gamma} \\ K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_z u_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_z w} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_z \theta_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_z \theta_z} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_z \dot{u}_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_z \dot{w}} & K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_z \dot{\theta}_\gamma} \\ K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{u}_\alpha u_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{u}_\alpha w} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{u}_\alpha \theta_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{u}_\alpha \theta_z} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{u}_\alpha \dot{u}_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{u}_\alpha \dot{w}} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{u}_\alpha \dot{\theta}_\gamma} \\ K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{w} u_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{w} w} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{w} \theta_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{w} \theta_z} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{w} \dot{u}_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{w} \dot{w}} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{w} \dot{\theta}_\gamma} \\ K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{\theta}_\alpha u_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{\theta}_\alpha w} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{\theta}_\alpha \theta_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{\theta}_\alpha \theta_z} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{\theta}_\alpha \dot{u}_\gamma} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{\theta}_\alpha \dot{w}} & K_{\alpha I \gamma J}^{\dot{\theta}_\alpha \dot{\theta}_\gamma} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

e  $\{\Delta f_{\alpha l}\}$  é o vetor de carregamento, o qual poderá também ser escrito como,

$$\{\Delta f_{\alpha l}\} = \begin{Bmatrix} \Delta f_{q_{\alpha l}} \\ \Delta f_{q_{z l}} \\ \Delta f_{m_{\alpha l}} \\ \Delta f_{m_{z l}} \\ \Delta f_{n_{\alpha l}} \\ \Delta f_{n_{z l}} \\ \Delta f_{l_{\alpha l}} \end{Bmatrix}. \quad (3.29)$$

Cada um dos componentes da matriz de rigidez (3.28) e do vetor de carregamento (3.29), para um elemento finito de nove nós baseado em uma formulação Lagrangiana atualizada, estão apresentados no Apêndice A.

É importante observar que a matriz incremental de rigidez  $[K_{\alpha l \gamma j}]$  pode ser decomposta em (ODEN, 1972)

$$[K_{\alpha l \gamma j}] = [K_{\alpha l \gamma j}^O + K_{\alpha l \gamma j}^G + K_{\alpha l \gamma j}^P] \quad (3.30)$$

onde  $K_{\alpha l \gamma j}^O$  é a matriz incremental de rigidez linear,  $K_{\alpha l \gamma j}^G$  é a matriz de rigidez geométrica e  $K_{\alpha l \gamma j}^P$  é a matriz de rigidez penalidade, através da qual são consideradas as contribuições do contato. Também o vetor incremental de carregamento  $\{\Delta f_{\alpha l}\}$  pode ser decomposto em

$$\{\Delta f_{\alpha l}\} = \{\Delta f_{\alpha l}^E + \Delta f_{\alpha l}^P + R\} \quad (3.31)$$

onde  $\Delta f_{\alpha l}^E$  é o vetor incremental de carregamento externo,  $\Delta f_{\alpha l}^P$  é o vetor de carregamento devido ao contato e  $R$  é o vetor do carregamento residual.

Os métodos de armazenamento, de solução da equação não-linear e de integração numérica serão discutidos na seção 3.9.

### 3.8. Condições Incrementais de Contato para o Elemento de Placa de Lo, Christensen e Wu

As condições incrementais generalizadas de contato para um corpo qualquer, foram apresentadas no Capítulo 2 Seção 2.3, representadas pelas expressões (2.38) e (2.39), as quais são reescritas aqui como

$$\Delta u_N - \Delta g_N \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_C, \quad (3.32)$$

onde

$$\Delta u_N = N_i \cdot \Delta u_i \quad (3.33a)$$

$$\Delta g_N = \frac{\phi(\mathbf{R}_X, \mathbf{R}_Y) - \psi(\mathbf{R}_X, \mathbf{R}_Y)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \psi(\mathbf{R}_X, \mathbf{R}_Y)}{\partial \mathbf{R}_X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi(\mathbf{R}_X, \mathbf{R}_Y)}{\partial \mathbf{R}_Y} \right)^2}}. \quad (3.33b)$$

Para o caso de placas, tem-se uma superfície de referência situada no plano x-y, i.e., na coordenada z=0. A equação da superfície que delimita o corpo elástico  $\phi(x,y)$  e que representa uma placa de espessura h, deve ser regular e será dada por

$$\phi(x, y) = u_z \left( x, y, z = \frac{+h}{2} \right) + \frac{h}{2} \quad (3.34a)$$

para um obstáculo acima da placa, e

$$\phi(x, y) = u_z\left(x, y, z = \frac{-h}{2}\right) - \frac{h}{2} \quad (3.34b)$$

se o obstáculo está abaixo da placa.

Utilizando o campo de deslocamentos (3.4), característico da teoria de Lo, Christensen e Wu para placas, dado por

$$u_z(x, y, z) \cong w(x, y) + z \theta_z(x, y) + z^2 w^*(x, y), \quad (3.4c)$$

e substituindo esta expressão nas expressões (3.34), elas resultam em

$$\phi(x, y) = w(x, y) + \frac{h}{2} \theta_z(x, y) + \frac{h^2}{4} w^*(x, y) + \frac{h}{2} \quad (3.35a)$$

$$\phi(x, y) = w(x, y) - \frac{h}{2} \theta_z(x, y) + \frac{h^2}{4} w^*(x, y) - \frac{h}{2}, \quad (3.35b)$$

para um obstáculo acima ou abaixo da placa, respectivamente.

Por outro lado, a equação que representa a fundação rígida  $\psi(x, y)$  deve ser regular e respeitar o critério  $\psi(x, y) \leq \phi(x, y)$ , se a fundação estiver situada abaixo, ou  $\psi(x, y) \geq \phi(x, y)$ , se estiver situada acima da placa. Neste trabalho, a expressão de  $\psi(x, y)$  é tomada como uma constante, representando uma fundação rígida plana abaixo da placa, i.e.,

$$\psi(x, y) = c, \quad (3.36)$$

onde  $c$  é uma constante determinada de acordo com o modelo.

Tomando-se a expressão (2.34), do vetor normal à fundação, no sistema global, tem-se

$$\{N\} = N_i e_i = \frac{\left( \frac{\partial \psi(R_x, R_y)}{\partial R_x} e_1, \frac{\partial \psi(R_x, R_y)}{\partial R_y} e_2, -1 e_3 \right)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \psi(R_x, R_y)}{\partial R_x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi(R_x, R_y)}{\partial R_y} \right)^2}} \quad (3.37)$$

e substituindo (3.36) em (3.37) obtém-se ao vetor normal como

$$\{N\} = N_i e_i = (0 \quad 0 \quad -1) e_3. \quad (3.38)$$

Então, utilizando-se o campo de deslocamentos incremental (3.10) e o vetor normal (3.38), pode-se reescrever a expressão (3.33a) como

$$\Delta u_N = - \left( \Delta w(x, y) - \frac{h}{2} \Delta \theta_z(x, y) + \frac{h^2}{4} \Delta w^*(x, y) \right), \quad (3.39)$$

bem como a expressão (3.33b) pode ser reescrita com o auxílio de (3.35b) e (3.36) como

$$\Delta g_N = w(x, y) - \frac{h}{2} \theta_z(x, y) + \frac{h^2}{4} w^*(x, y) - \frac{h}{2} - c. \quad (3.40)$$

Finalmente, a condição incremental de contato (3.32) é reescrita, de acordo com a teoria de Lo, Christensen e Wu para placas, como

$$\begin{aligned}
& -\left( \Delta w(x,y) - \frac{h}{2} \Delta \theta_z(x,y) + \frac{h^2}{4} \Delta w^*(x,y) \right) - \\
& -\left( w(x,y) - \frac{h}{2} \theta_z(x,y) + \frac{h^2}{4} w^*(x,y) - \frac{h}{2} - c \right) \leq 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

sobre  $\Gamma_c$ .

### 3.9. Comentários sobre Implementação Numérica

Na seção (3.7) foi apresentada a formulação de um elemento finito baseado em uma teoria de ordem superior que possui onze graus de liberdade por nó, i.e., noventa e nove graus de liberdade por elemento. Desta forma, considera-se apropriado uma análise visando a redução dos custos computacionais envolvidos no processo de quadratura numérica que, geralmente, representa uma parte bastante substancial do custo computacional total em uma análise numérica completa.

#### 3.9.1. Processo de Vetorização e Notação Indicial

As maiores restrições para o uso de elementos finitos de ordem superior foram atribuídas durante muito tempo a:

- (i) Grande custo computacional envolvido no desenvolvimento de suas matrizes características, i.e., as matrizes de rigidez linear, geométrica e penalidade;
- (ii) Aumento na meia-banda do sistema das equações algébricas resultante para toda estrutura.

Recentemente, porém, com o advento dos sistemas computacionais com processamento vetorial, foi possível reavaliar a utilização de elementos finitos de ordem superior para análise de estruturas complexas (NOOR e HARTLEY, 1978).

Tais computadores trabalham com dois tipos de dados, os escalares (um elemento de valor único) e os vetores (um arranjo de escalares). As operações vetoriais representam um ganho substancial de tempo de processamento sobre as operações escalares sequenciais (LEVESQUE e WILLIAMSON, 1989).

Para simplificar o processo de montagem e armazenamento da matriz de rigidez  $[K_{\alpha\gamma j}]$ , será realizado um particionamento em blocos na direção das linhas e das colunas. Cada um dos blocos correspondem aos graus de liberdade de um nó do elemento (Figura 3.8).

$$[K_{\alpha\gamma j}] = \begin{bmatrix} [K_{\alpha 1\gamma 1}] & & & & & & & & \\ & [K_{\alpha 1\gamma 2}] & & & & & & & \\ & & [K_{\alpha 2\gamma 2}] & & & & & & \\ & & & [K_{\alpha 2\gamma 3}] & & & & & \\ & & & & [K_{\alpha 3\gamma 3}] & & & & \\ & & & & & [K_{\alpha 3\gamma 4}] & & & \\ & & & & & & [K_{\alpha 4\gamma 4}] & & \\ & & & & & & & [K_{\alpha 4\gamma 5}] & \\ & & & & & & & & [K_{\alpha 5\gamma 5}] \\ & & & & & & & & & [K_{\alpha 5\gamma 6}] \\ & & & & & & & & & & [K_{\alpha 6\gamma 6}] \\ & & & & & & & & & & & [K_{\alpha 6\gamma 7}] \\ & & & & & & & & & & & & [K_{\alpha 7\gamma 7}] \\ & & & & & & & & & & & & & [K_{\alpha 7\gamma 8}] \\ & & & & & & & & & & & & & & [K_{\alpha 8\gamma 8}] \\ & & & & & & & & & & & & & & & [K_{\alpha 8\gamma 9}] \\ & & & & & & & & & & & & & & & & [K_{\alpha 9\gamma 9}] \end{bmatrix}$$

Simétrica

Figura 3.8 Partições nodais da matriz de rigidez do elemento.

Devido a simetria da matriz de rigidez do elemento  $[K_{\alpha\gamma j}]$ , somente os blocos situados sobre um dos lados da diagonal principal serão calculados (Figura 3.8). Para um problema ser vetorizável ele deve possuir três características:

- (i) Operações repetidas;
- (ii) Independência de cada resultado;
- (iii) Os membros de cada operação têm localização fixa na memória.

Por conveniência, o desenvolvimento das partições nodais de  $[K_{\alpha\gamma j}]$  foi dividida em três diferentes fases:



- (i) Geração dos vetores das funções de interpolação;
- (ii) Geração das matrizes de deformação-deslocamento e constitutiva;
- (iii) Cálculo das matrizes de rigidez nodal.

As operações envolvidas em cada uma das três fases são discutidas em detalhes por Noor e Hartley (1978).

O processo de organização dos dados e cálculos dentro de um algoritmo numérico é usualmente denominado vetorização do algoritmo. A performance do algoritmo vetorizado depende da capacidade de processamento vetorial do computador utilizado.

Além disso, a notação indicial foi aplicada na formulação da equação do elemento finito (3.27) resultando numa melhor organização da formulação e do algoritmo numérico. O uso da notação indicial também reduz substancialmente o número de cálculos a serem executados, devido a incorporação da multiplicação explícita das matrizes  $[B]^T [D] [B]$  no programa, para o caso de material elástico, ao invés da multiplicação tríplice das matrizes, com isto espera-se reduzir o tempo de processamento para a montagem da matriz de rigidez do elemento por um fator de nove, i.e., reduzir a um nono o tempo anteriormente gasto. Deve-se observar que, para notação indicial, nenhum tipo especial de armazenamento será necessário para a matriz de rigidez  $[K_{\alpha\beta\gamma}]$  (GUPTA e MOHRAZ, 1972).

### 3.9.2. Algoritmo para Solução de Equações Não-Lineares

O sistema de equações (3.26) representam um problema estrutural não-linear, incluindo não-linearidade geométrica e não-linearidade devido ao contato. Inúmeros pesquisadores já desenvolveram metodologias de solução para este problema, dentre os quais, Matthies e Strang (1979), Oden (1972) e Gadala e Ovaras (1984), sendo que este último, apresenta uma revisão bastante sucinta sobre o assunto. Ainda, para solução de problemas de estabilidade estrutural, metodologias mais especializadas

foram desenvolvidas por Riks (1972, 1979, 1984) e Crisfield (1979, 1981). Neste trabalho será utilizada a aproximação teórica baseada em equilíbrio incremental, i.e., o sistema será solucionado para cada incremento de carga  $\{\Delta f_{\alpha l}\}$ . O método de solução utilizado nesta teoria é o algoritmo iterativo de Newton-Raphson (BENEDETTI, BREBBIA e CEDOLIN, 1972; ZIENKIEWICZ, 1977), onde os deslocamentos incrementais linearizados associados com o incremento de carga, são dados por

$$\delta\{\Delta u_{\gamma J}\} = \left([K_{\alpha l \gamma J}]^i\right)^{-1} \{\Delta f_{\alpha l}\}^{i+1} \quad (3.41)$$

e o deslocamento total, diferenciado no estado inicial, será dado por

$$^*\{\Delta u_{\gamma J}\}^{i+1} = ^*\{\Delta u_{\gamma J}\}^i + \delta\{\Delta u_{\gamma J}\}, \quad (3.42)$$

onde  $^*\{\bullet\}$  indica que a quantidade possui definição idêntica a  $\{\bullet\}$ , referenciados no estado inicial, e  $i$  indica a iteração dentro do processo incremental de carga. Utilizando este procedimento a solução de um problema não-linear pode ser obtida considerando-se o mesmo como uma sequência de incrementos linearizados.

É necessário corrigir o erro da solução linearizada, considerando-se a diferença entre o carregamento externo e o carregamento interno, os quais devem estar equilibrados para os deslocamentos dado em (3.42), como sendo o resíduo da solução.

Dentro do incremento de carga  $\{\Delta f_{\alpha l}\}$  deseja-se diminuir a diferença residual até que esta seja menor que uma tolerância previamente estipulada. Isto é, realizado através de um processo iterativo onde considera-se o resíduo  $R$  como um incremento de carga aplicado na posição  $\left([K_{\alpha l \gamma J}]^i \delta\{\Delta u_{\gamma J}\}, ^*\{\Delta u_{\gamma J}\}^{i+1}\right)$ , que será repetido até alcançar a tolerância desejada, passando-se então para um novo incremento de carga e um novo processo iterativo. Esta sequência será repetida até que toda a carga externa

seja aplicada. Este algoritmo iterativo de Newton-Raphson foi escolhido devido a fácil implementação e rápida convergência.

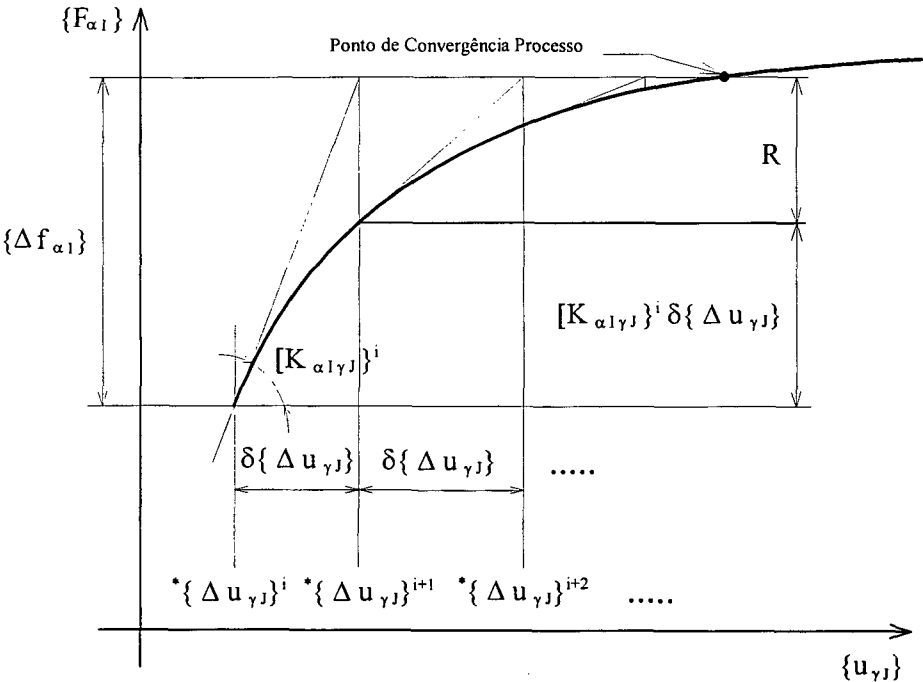


Figura 3.9 Algoritmo iterativo de Newton-Raphson.

O critério de tolerância escolhido para convergência do processo iterativo foi

$$\frac{\sqrt{\{R\}^T \cdot \{R\}}}{\sqrt{\{\Delta f_{\alpha l}\}^T \cdot \{\Delta f_{\alpha l}\}}} \leq \text{TOL} \tag{3.43}$$

onde TOL indica a tolerância máxima desejada.

### 3.9.3. Integração Numérica e Fator de Penalidade

Luersen (1994) apresenta uma completa revisão sobre integração numérica, salientando os detalhes da implementação da integração seletiva reduzida, na qual as

parcelas de membrana e flexão são integradas utilizando  $3 \times 3$  pontos da quadratura Gaussiana e a parcela de cisalhamento transversal é subintegrada utilizando  $2 \times 2$  pontos da quadratura (HUGHES, COHEN e HAROUN, 1978; MALKUS e HUGHES, 1978). Esta integração seletiva reduzida é realizada com o objetivo de evitar o fenômeno de travamento (locking) caracterizado pela rigidez excessiva apresentada pelo modelo quando a espessura da placa diminui, a qual não corresponde ao comportamento físico real do mesmo.

Observa-se ainda que, na formulação de elementos finitos baseada em um campo de deslocamentos que necessita subintegração na parcela de cisalhamento, poderá ocorrer o surgimento de modos espúrios, os quais correspondem a modos de energia zero. O elemento finito Lagrangiano de nove nós de placa, com integração seletiva reduzida, apresenta um modo espúrio (BELYTSCHKO, LIU, ONG e LAM, 1985).

O problema de travamento (locking) é significativo no caso do elemento finito formulado com um campo de deslocamentos de primeira ordem (LUERSEN, 1994), onde a distribuição da deformação cisalhante transversal é constante e assim, diferente de zero nas superfícies da placa (Figura 3.5b) resultando em um modelo enrijecido, este efeito torna-se mais acentuado quando a espessura da placa aproxima-se de zero. No caso do elemento finito formulado com um campo de deslocamentos de ordem superior, onde a distribuição da deformação cisalhante transversal é parabólica na espessura da placa e nula nas superfícies da mesma (Figura 3.5b), não é observado preferência para escolha do método de integração numérica, pois estes campos de deslocamentos não resultam no enrijecimento apresentado no caso da formulação com o campo de deslocamentos de primeira ordem (SMITH e PALAZOTTO, 1993). Esta constatação está de acordo com estudos realizados por Kant (1982), onde o desempenho do elemento de ordem superior não apresenta preferência pela escolha de um determinado método de integração numérica.

Para facilidade de comparação com os resultados disponíveis na literatura optou-se pela obtenção das tensões, utilizadas para cálculo da matriz de rigidez

geométrica e para análise dos resultados, através do cálculo com quadratura Gaussiana uma ordem inferior a utilizada na integração cheia (COOK, MALKUS e PLESHA, 1988).

A parcela da matriz de rigidez proveniente da penalidade foi integrada utilizando uma quadratura Gaussiana de  $2 \times 2$ . Desta forma, fica-se em concordância com formulação de elementos finitos mistos válidos para problemas com restrições unilaterais (KIKUCHI e ODEN, 1984) e com o procedimento adotado por Ohtake, Oden e Kikuchi (1980), onde as parcelas de penalidade foram subintegradas.

Quando as condições de contato são consideradas, o fator de penalidade  $\varepsilon$  é introduzido. A escolha deste fator é uma etapa fundamental na solução via método da penalidade, devido à forte influência do fator de penalidade  $\varepsilon$  sobre as propriedades da convergência. Teoricamente, quanto menor for o valor de  $\varepsilon$ , mais próximo da solução exata se estará. Contudo, poderá ocorrer um mau condicionamento das matrizes e a não convergência do processo iterativo para valores de  $\varepsilon$  muito pequenos. Por outro lado, quanto maior for o valor de  $\varepsilon$ , mais grosseira será a violação da condição de contato, conduzindo a resultados incorretos. Levando em consideração estas características, Luersen (1994) apresenta uma análise do fator de penalidade  $\varepsilon$  para problemas de placas, onde pode-se notar que, para valores menores que  $10^{-3}/E$  há convergência para solução correta. Kikuchi e Oden (1984) e Selke (1986) recomendam valores para o fator de penalidade na faixa de  $10^{-5}/E \leq \varepsilon \leq 10^{-3}/E$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material da placa.

A seguir, serão resolvidos numericamente alguns problemas de placa utilizando elemento finito de ordem superior baseado na teoria de placa de Lo, Christensen e Wu.

# CAPÍTULO 4

## Resultados e Análises Numéricas

### 4.1. Introdução

No capítulo anterior utilizou-se a formulação Lagrangiana atualizada do princípio dos trabalhos virtuais, em sua forma incremental, para obter as equações do elemento finito  $C^0$  de ordem superior, baseado na teoria de Lo, Christensen e Wu para placas (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a), o qual pode ser utilizado para resolver numericamente problemas de placas submetidas a grandes deslocamentos, i.e., não-linearidade geométrica, e sujeitas à restrições de contato unilateral.

Neste capítulo, serão apresentadas inicialmente algumas observações sobre os códigos computacionais que foram desenvolvidos e as condições de contorno utilizadas. A seguir, será feita a validação do elemento finito  $C^0$ , desenvolvido anteriormente, através da comparação dos resultados numéricos obtidos na solução dos problemas propostos, com os resultados correspondentes, analíticos ou numéricos, retirados da literatura disponível. Entre os problemas propostos para alcançar este objetivo tem-se: ( i ) a análise linear de uma placa retangular; ( ii ) as análises de uma placa retangular e uma circular submetidas a grandes deflexões; ( iii ) as análises com restrição de contato unilateral, considerando-se pequenos deslocamentos, onde serão analisadas uma viga e uma placa circular; ( iv ) as análises com restrição de contato unilateral, considerando-se grandes deslocamentos, onde serão analisadas uma viga e uma placa retangular.

## 4.2. Comentários Preliminares

Conforme já discutido no capítulo anterior, a formulação apresentada é utilizada para a obtenção de um elemento finito  $C^0$  isoparamétrico quadrilateral Lagrangiano de nove nós, que será usado na solução numérica de problemas de contato em placas.

Para a resolução numérica dos problemas analisados dois códigos computacionais foram desenvolvidos utilizando um compilador FORTRAN. Um, chamado HOST (High Order Shear Theory), foi desenvolvido utilizando a formulação apresentada neste trabalho, com onze graus de liberdade por nó  $(u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z, u^*, v^*, w^*, \theta_x^*, \theta_y^*)$  e o outro, chamado FOST (First Order Shear Theory), foi desenvolvido utilizando a formulação apresentada por Luersen (1994), com cinco graus de liberdade por nó  $(u, v, w, \theta_x, \theta_y)$ , onde é utilizado o fator de correção da distribuição das tensões de cisalhamento transversal de Reissner, que é  $5/6$  (REISSNER, 1945). Ambos os programas foram desenvolvidos possibilitando a análise linear, e as análises de não-linearidade geométrica e de restrição de contato unilateral. Os programas são baseados no mesmo algoritmo, sendo vetorizados e fazendo uso da notação indicial, dentre outras peculiaridades citadas na Seção 3.9.

Devido à utilização de simetria biaxial nos problemas de placas, e axial nos problemas de vigas discutidos a seguir, somente um quarto das placas e a metade das vigas serão modeladas. Sempre será utilizada a condição de zero inicial, i.e., deslocamentos no estado inicial são considerados como zero. Todos os valores de tensões foram calculados nos pontos de Gauss, o mais próximo possível das localizações de seus valores máximos.

O critério de tolerância utilizado para verificar a convergência do processo iterativo será aquele estabelecido na expressão (3.43), sendo a tolerância máxima

assumida, para solução dos problemas numéricos, de 1%, i.e., a norma Euclidiana do resíduo da solução  $\{R\}$  não deverá ultrapassar 1% da norma Euclidiana do carregamento aplicado, sendo este carregamento acumulativo nos incrementos. Desta forma, reescreve-se a expressão (3.43) como

$$\frac{\sqrt{\{R\}^T \cdot \{R\}}}{\sqrt{\{\Delta f_{al}\}^T \cdot \{\Delta f_{al}\}}} \leq 0.01. \quad (4.1)$$

Na solução numérica dos problemas onde as restrições de contato unilateral são consideradas, o fator de penalidade  $\varepsilon$  escolhido varia para cada problema. Porém, a análise para determinação dos valores de  $\varepsilon$  foi baseada no estudo realizado por Luersen (1994) e Luersen, Barp e Selke (1995), onde buscou-se, entre os infinitos valores possíveis para  $\varepsilon$ , um que violasse o mínimo possível as restrições de contato e que tivesse uma rápida convergência.

O elemento finito desenvolvido foi inteiramente baseado em campos de deslocamentos previamente assumidos. Desta forma, somente será necessário especificar as condições de contorno dos deslocamentos. Tais condições de contorno correspondentes ao elemento finito de ordem superior estão apresentadas na Seção 4.2.1 para os diferentes tipos de suporte utilizados. Também as condições de simetria são apresentadas.

#### 4.2.1. Condições de Contorno

Conforme foi discutido no capítulo anterior, as quantidades assinaladas com asterisco (\*) exercem influência sobre as quantidades não assinaladas. Por conseguinte, fica claro que as quantidades  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  estão relacionadas com as quantidades  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$ ,  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$ , respectivamente (KANT, 1994).



A partir deste ponto, pode-se definir as condições de contorno para placas simplesmente suportada e engastada, como segue:

**(i) Placa Simplesmente Suportada:**

✦ Lados paralelos ao eixo **X**

$$u = w = \theta_x = u^* = w^* = \theta_x^* = 0 \quad (4.2a)$$

✦ Lados paralelos ao eixo **Y**

$$v = w = \theta_y = v^* = w^* = \theta_y^* = 0 \quad (4.2b)$$

**(ii) Placa Engastada:**

✦ Ao longo de todos os lados

$$u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = u^* = v^* = w^* = \theta_x^* = \theta_y^* = 0 \quad (4.3)$$

No caso de se modelar somente um quarto da placa, pode-se definir ainda as condições de simetria ao longo da linha de centro, como segue:

✦ Em relação ao eixo **X**

$$v = \theta_y = v^* = \theta_y^* = 0 \quad (4.4a)$$

✦ Em relação ao eixo **Y**

$$u = \theta_x = u^* = \theta_x^* = 0 \quad (4.4b)$$

As condições de contorno correspondentes a formulação de primeira ordem são obtidas simplesmente pela omissão de  $\theta_z$  e das quantidades assinaladas com asterisco (\*), as quais são referidas aos deslocamentos de ordem superior. Por exemplo, serão necessárias onze variáveis de deslocamentos prescritas no programa de ordem superior (HOST) para especificar uma condição de contorno engastada, ao passo que, serão

necessárias cinco variáveis de deslocamentos prescritas no programa de primeira ordem (FOST), considerando a mesma condição de contorno.

Para todos os problemas resolvidos neste Capítulo, serão utilizadas as condições de contorno e de simetria apresentadas acima.

### 4.3. Exemplos Numéricos para Problemas Lineares

Nesta seção, será verificada a validade do elemento finito, baseado na teoria de Lo, Christensen e Wu (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977), para a solução de problemas lineares, comparando-as com as soluções apresentadas por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e Kant, Owen e Zienkiewicz (1982).

Uma placa quadrada, onde o carregamento e as propriedades da geometria e do material utilizado são apresentadas no conjunto de dados 1 (4.5), é analisada com dois tipos de condições de contorno, i.e., simplesmente suportada (4.2) e engastada (4.3). Os resultados numéricos foram obtidos com a modelagem de apenas um quadrante da placa, devido a simetria biaxial do problema, utilizando as condições de simetria (4.4) e uma malha regular com quatro elementos finitos (Figura 4.1).

#### **Conjunto de dados 1 (KANT, OWEN e ZIENKIEWICZ, 1982)**

Os dados para análise linear são:

Placa Quadrada Isotrópica

$$a = 1.0$$

$$h = 0.2; 0.1; 0.02; 0.01$$

$$a/h = 5.0; 10.0; 50.0; 100.0 \quad (4.5)$$

$$q = 1.0$$

$$\nu = 0.300$$

$$D = 1.0$$

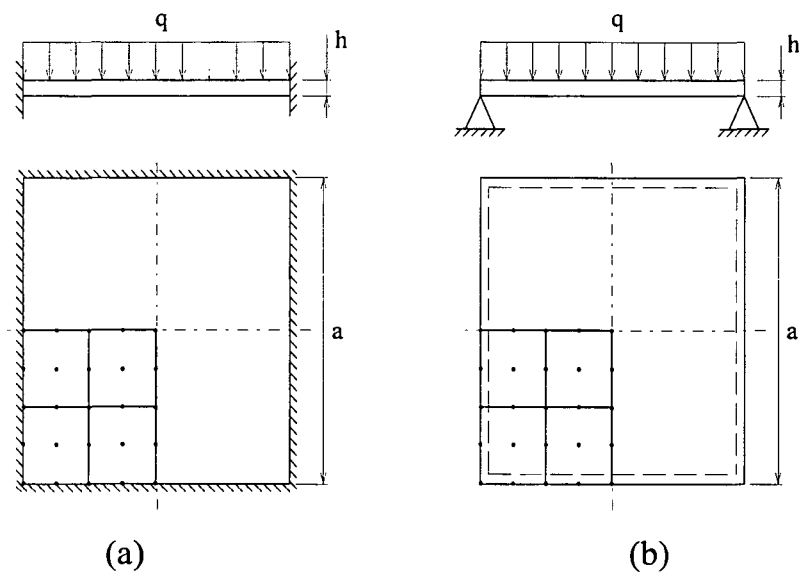


Figura 4.1 Placa quadrada engastada (a) e simplesmente suportada (b) sujeita a um carregamento uniformemente distribuído (um quadrante modelado com 4 elementos).

As Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam os deslocamentos adimensionais do centro da placa obtidos para a análise linear da flexão de uma placa quadrada simplesmente suportada e de uma placa engastada, respectivamente. Os deslocamentos são apresentados para diferentes valores de razão de aspecto ( $a/h$ ).

Tabela 4.1 Deslocamento central de uma placa quadrada simplesmente suportada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

$a/h$	TIMOSHENKO (1959)	KANT (1982)	FOST 2×2	HOST 2×2
5	0.00406	0.00481	0.004912	0.004813
10	0.00406	0.00426	0.004280	0.004256
50	0.00406	0.00408	0.004077	0.004076
100	0.00406	0.00407	0.004071	0.004071

Tabela 4.2   Deslocamento central de uma placa quadrada engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

a/h	TIMOSHENKO (1959)	KANT (1982)	FOST 2×2	HOST 2×2
5	0.00126	0.00211	0.002184	0.002108
10	0.00126	0.00146	0.001516	0.001463
50	0.00126	0.00123	0.001286	0.001234
100	0.00126	0.00123	0.001278	0.001227

Os resultados obtidos com os programas de elementos finitos HOST, baseado na teoria de Lo, Christensen e Wu, e FOST, baseado na teoria de Mindlin-Reissner, são comparados com os resultados obtidos numericamente por Kant, Owen e Zienkiewicz (1982), onde, para este último, foi utilizada a teoria de Kant (3.6) e o princípio da energia potencial total para a formulação do elemento finito isoparamétrico Lagrangiano de nove nós, também utilizado para modelar um quadrante da placa com quatro elementos finitos, e também com o resultado analítico para flexão de placas finas obtido por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), através de uma solução por séries. Considerando-se somente o primeiro termo da série para obter o deslocamento transversal  $w$ , obtem-se

$$w_{ss} = 0.00406 \frac{q a^4}{D}$$

(4.6)

para flexão de placa simplesmente suportada e

$$w_e = 0.00126 \frac{q a^4}{D}$$

(4.7)

para flexão de placa engastada, sendo ambas expressões válidas para carregamento uniformemente distribuído, e onde  $D$  é a rigidez à flexão da placa, dada por

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} . \quad (4.8)$$

Algumas observações são realizadas com base nos resultados numéricos apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2. Conforme comentado no Capítulo 3, as teorias de ordem superior são, comparativamente, menos flexíveis do que as teorias clássica e de primeira ordem (KANT, 1982). Verifica-se aqui a validade desta afirmação, uma vez que, tanto os deslocamentos apresentados por Kant, Owen e Zienkiewicz (1982), quanto os obtidos com o programa HOST são menores, logo o modelo é menos flexível, do que o apresentado por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e o obtido com o programa FOST.

A pequena diferença observada entre os resultados apresentados por Kant, Owen e Zienkiewicz (1982) e aqueles obtidos com HOST, deve-se ao fato de que a teoria de Lo, Christensen e Wu (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a) leva em consideração os efeitos dos deslocamentos sobre o plano x-y, os quais são negligenciados na teoria de Kant (KANT, 1982).

Desta forma, com base na análise dos resultados mostrados nas Tabelas 4.1 e 4.2, pode-se concluir que a performance do programa HOST é muito boa, em ambos os casos estudados, validando o elemento HOST para a solução de problemas lineares.

#### 4.4. Exemplos Numéricos para Problemas Geometricamente Não-Lineares

Nesta seção, serão analisadas a validade, versatilidade e credibilidade do elemento finito baseado na teoria de Lo, Christensen e Wu (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a) para a solução de problemas não-lineares, considerando-se somente as

não-linearidades geométricas. As soluções numéricas obtidas serão comparadas com as soluções apresentadas por Chia (1980), Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e Pica, Wood e Hinton (1980).

Nos exemplos apresentados, os seguintes parâmetros adimensionais foram utilizados para análise da deflexão central e do carregamento

$$\text{Deflexão Central} \quad w = \frac{\bar{w}(0,0)}{h}$$

Carregamento

$$(i) \text{ Uniformemente Distribuído} \quad q = \frac{1}{E} \frac{a^4}{h^4} \bar{q}$$

$$(ii) \text{ Concentrado} \quad p = \frac{1}{E} \frac{a^2}{h^4} \bar{p}$$

onde  $a$  é a dimensão característica,  $h$  é a espessura e  $E$  é o módulo de elasticidade da placa e ainda  $\bar{w}$  é a deflexão transversal,  $\bar{q}$  é o carregamento uniformemente distribuído e  $\bar{p}$  é o carregamento concentrado central.

#### 4.4.1. Análise Não-Linear de uma Placa Quadrada

Uma placa quadrada, onde o carregamento e as propriedades da geometria e do material utilizado são apresentadas no conjunto de dados 2 (4.9), é analisada considerando-se que ela esteja rigidamente fixa, i.e., engastada (4.3). Este exemplo de análise tornou-se um padrão utilizado por diversos autores, por exemplo, Pica, Wood e Hinton (1980), Kant e Kommineni (1992, 1993), Luersen (1994), etc., para validar as formulações do elemento finito de placa utilizados para a solução de problemas com não-linearidade geométrica.

**Conjunto de dados 2 (PICA, WOOD e HINTON, 1980)**

Os dados para análise não-linear são:

Placa Quadrada Isotrópica

$$a=300.0$$

$$h=3.0$$

$$a/h=100.0$$

$$q=402.0$$

$$\nu=0.316$$

$$E = 0.3 \times 10^8$$

(4.9)

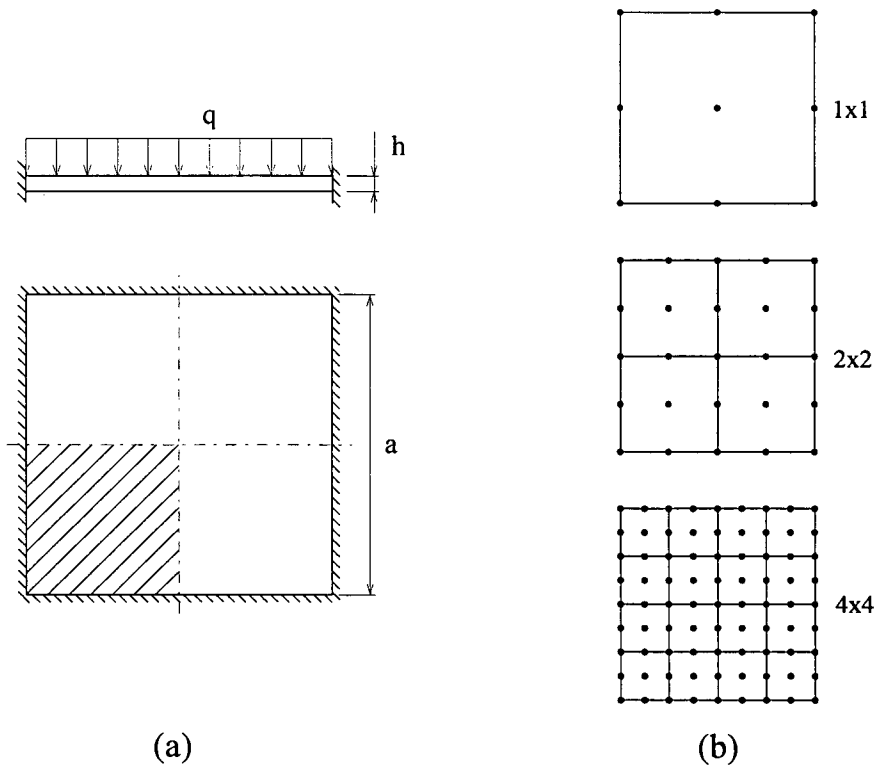


Figura 4.2 (a) Placa quadrada engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído - a região hachurada representa o quadrante discretizado.

(b) Discretização de um quadrante da placa com 1, 4 e 16 elementos finitos.

Os resultados numéricos foram obtidos com a modelagem de apenas um quadrante da placa, devido a simetria biaxial do problema (Figura 4.2a), utilizando as

condições de simetria (4.4) e as malhas regulares com um, quatro e dezesseis elementos finitos (Figura 4.2b), com o objetivo de verificar-se a convergência h dos resultados para o problema acima.

A Tabela 4.3 apresenta os deslocamentos adimensionais obtidos com a análise do problema de flexão de uma placa quadrada engastada. O carregamento uniformemente distribuído foi dividido em nove passos, sendo apresentados os deslocamentos para cada passo de carga.

Tabela 4.3 Deslocamento central de uma placa quadrada engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído.

Carga q	CHIA (1980)	PICA (1980)	FOST			HOST		
			1×1	2×2	4×4	1×1	2×2	4×4
17.79	0.24681	0.2368	0.28878	0.23663	0.23197	0.26867	0.22670	0.22388
38.30	0.48182	0.4699	0.58860	0.47307	0.45470	0.54396	0.45215	0.44748
63.40	0.69959	0.6915	0.89661	0.70689	0.66880	0.82403	0.67633	0.65945
95.00	0.90543	0.9026	1.21262	0.93783	0.87709	1.10700	0.89718	0.86544
134.90	1.10400	1.1063	1.53243	1.16530	1.08148	1.39101	1.11399	1.06742
184.00	1.29528	1.3009	1.84895	1.38540	1.28009	1.67081	1.32338	1.26353
245.00	1.48541	1.4928	2.16953	1.60268	1.47768	1.95342	1.53033	1.45891
318.00	1.67106	1.6786	2.48254	1.81262	1.67035	2.22916	1.73040	1.64952
402.00	1.84903	1.8555	2.78342	2.01167	1.85470	2.49549	1.92036	1.83206

Os resultados obtidos com os programas HOST e FOST são comparados com os resultados obtidos numericamente por Pica, Wood e Hinton (1980), onde foi utilizada a teoria de Mindlin-Reissner para formulação Lagrangiana total do elemento finito isoparamétrico Lagrangiano de nove nós para não-linearidade geométrica, também utilizado para modelar um quadrante da placa com um, quatro e dezesseis elementos finitos. Também foram comparados com os resultados analíticos para



flexão de placas quadradas sujeitas a um carregamento uniformemente distribuído, obtidos por Chia (1990) através de uma solução utilizando a teoria de von Kármán. Tomando-se somente o primeiro termo de cada série e considerando  $\nu = 0.316$ , obtem-se

$$w = 2.5223 w_{11} \text{ , sendo} \tag{4.10a}$$

$$\left(\frac{w_{11}}{h}\right)^3 + 0.2522 \frac{w_{11}}{h} = 0.0001333 \frac{\bar{q} a^4}{D h} \tag{4.10b}$$

e  $D$  a rigidez à flexão da placa (4.8).

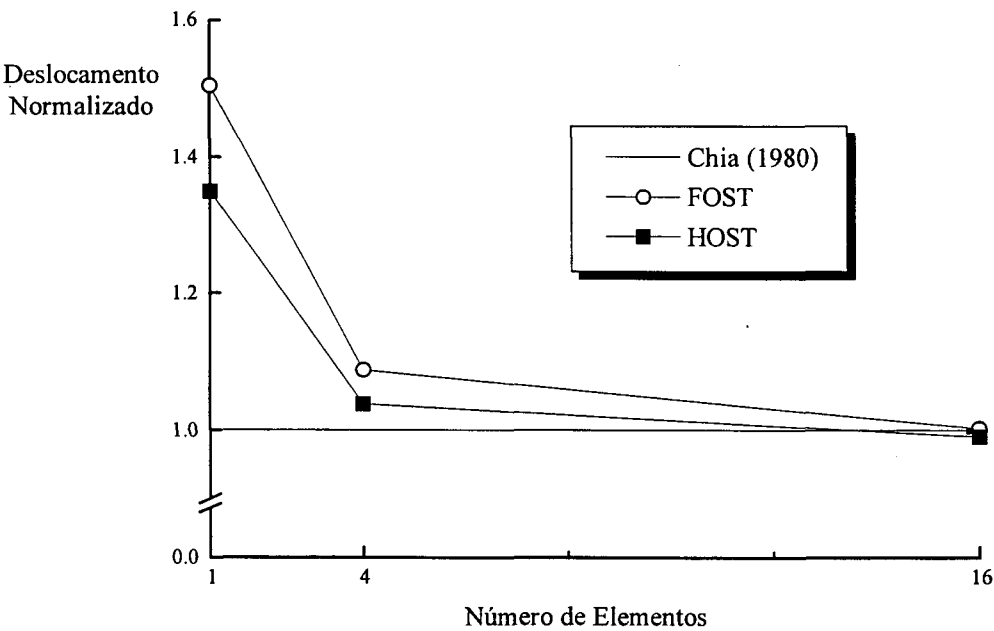


Figura 4.3 Análise da convergência  $h$  do deslocamento central com carga total.

Para uma melhor visualização da performance do elemento finito de ordem superior (HOST) para solução de problemas com não-linearidade geométrica, os resultados adimensionais da malha com dezesseis elementos finitos são apresentados

na forma de um gráfico (Figura 4.4), juntamente com aqueles do elemento finito de primeira ordem (FOST) e os obtidos por Pica, Wood e Hinton (1980) e Chia (1980).

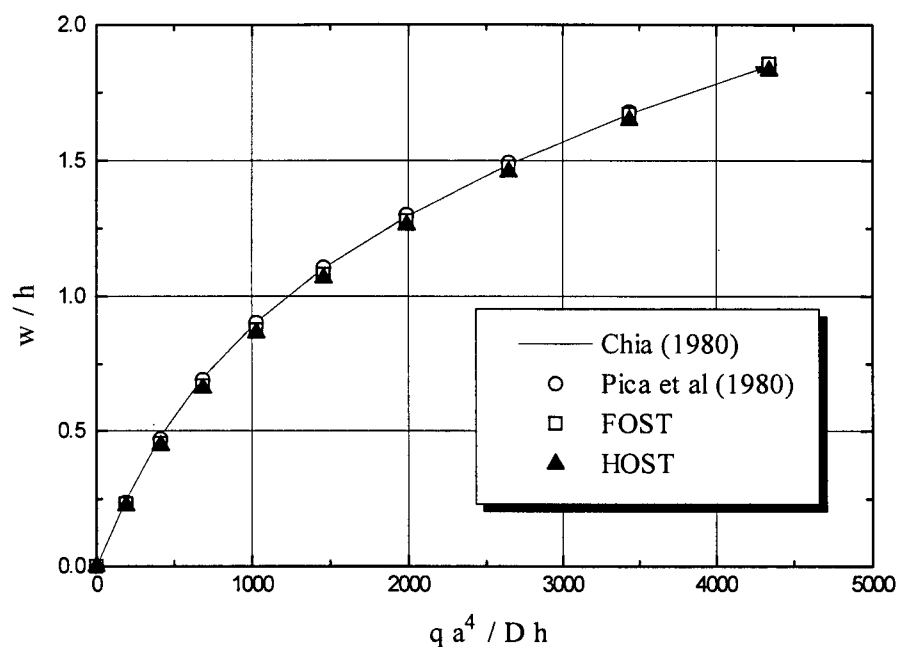


Figura 4.4 Deslocamento central de uma placa quadrada engastada.

Tomando como parâmetro de análise os resultados apresentados na Tabela 4.3 e no gráfico da Figura 4.4 pode-se inicialmente observar que o programa HOST, baseado em uma teoria de ordem superior, apresenta valores de deslocamentos transversais inferiores aqueles obtidos com o programa FOST, baseado em uma teoria de primeira ordem. Desta forma, verifica-se, novamente, a validade da afirmação feita por Kant (1982), onde é dito que as teorias de ordem superior são, comparativamente, menos flexíveis do que as teorias de primeira ordem.

Pode-se ainda observar, dos resultados apresentados anteriormente, que o elemento finito de ordem superior formulado neste trabalho possui ótima concordância com os resultados numéricos obtidos com o elemento finito de primeira ordem e os

retirados de Pica, Wood e Hinton (1980), e também com os resultados analíticos apresentados por Chia (1980).

Analisando o gráfico da Figura 4.3 pode-se, em primeiro lugar, observar que tanto o programa HOST quanto o programa FOST possuem uma rápida convergência de resultados quando a malha é refinada, i.e., possuem rápida convergência  $h$ . Em segundo lugar, uma importante conclusão pode ser retirada da Figura 4.3 verificando que a curva de convergência para o programa HOST situa-se abaixo daquela obtida para o programa FOST. Mostrando que para uma mesma malha, por exemplo para a malha com quatro elementos, o elemento de ordem superior resulta em um erro de 3.70% enquanto que o elemento de primeira ordem resulta em um erro de 8.07%, ambos analisados em relação ao resultado analítico (CHIA, 1980). Com base nestas observações pode-se concluir que o programa HOST necessita um número menor de elementos, comparando com o programa FOST, para obter-se boa convergência dos resultados.

Desta forma, com base na análise dos resultados mostrados na Tabela 4.3 e nas Figuras 4.3 e 4.4, pode-se concluir que a performance do programa HOST é muito boa para o problema selecionado. Validando o elemento HOST para solução de problemas com não-linearidade geométrica em placas retangulares.

#### 4.4.2. Análise Não-Linear de uma Placa Circular

Uma placa circular, onde o carregamento e as propriedades da geometria e do material utilizado são apresentadas no conjunto de dados 3 (4.4), é analisada considerando-se que ela esteja rigidamente fixa, i.e., engastada (4.10). Novamente os resultados numéricos foram obtidos com a modelagem de apenas um quadrante da placa, devido a simetria biaxial do problema (Figura 4.5a), utilizando as condições de simetria (4.11) e as malhas com um, três e doze elementos finitos (Figura 4.5b) com o objetivo de verificar-se a convergência  $h$  dos resultados.

**Conjunto de dados 3 (PICA, WOOD e HINTON, 1980)**

Os dados para análise não-linear são:

Placa Circular Isotrópica

$$a=100.0$$

$$h=2.0$$

$$a/h=50.0$$

$$p=6.0$$

$$\nu=0.300$$

$$E = 0.1 \times 10^8$$

(4.11)

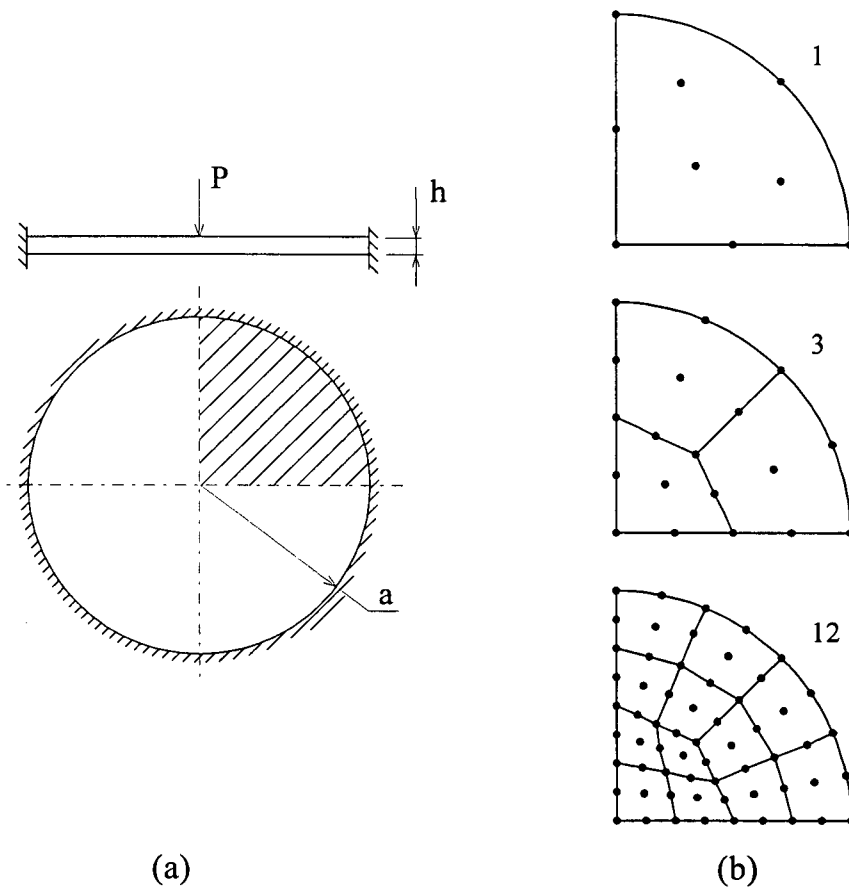


Figura 4.5 (a) Placa circular engastada sujeita a um carregamento concentrado central - a região hachurada representa o quadrante discretizado.

(b) Discretização de um quadrante da placa com 1, 3 e 12 elementos finitos.

A Tabela 4.4 apresenta os deslocamentos adimensionais obtidos com a análise do problema de flexão de uma placa circular engastada. O carregamento concentrado central foi dividido em seis passos, sendo apresentados os deslocamentos para cada passo de carga.

Tabela 4.4 Deslocamento central de uma placa circular engastada sujeita a um carregamento concentrado central.

Carga p	TIMOSH (1959)	CHIA (1980)	PICA (1980)	FOST			HOST		
				1	3	12	1	3	12
1.0	0.21273	0.21296	0.2149	0.38691	0.21785	0.20931	0.38153	0.21314	0.20702
2.0	0.40465	0.40516	0.4088	0.69667	0.41641	0.39661	0.69067	0.40789	0.39230
3.0	0.56927	0.57051	0.5754	0.96205	0.59158	0.56002	0.95315	0.58031	0.55323
4.0	0.70967	0.71225	0.7184	1.18426	0.74622	0.70262	1.17606	0.73232	0.69358
5.0	0.83089	0.83542	0.8427	1.37589	0.88354	0.82830	1.36686	0.86726	0.81756
6.0	0.93726	0.94419	0.9527	1.54441	1.00634	0.94047	1.53469	0.98824	0.92853

Os resultados obtidos com os programas HOST e FOST são comparados, novamente, com os resultados obtidos numericamente por Pica, Wood e Hinton (1980), e também com os resultados analíticos para flexão de placas circulares sujeitas a um carregamento concentrado central obtidos por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e por Chia (1980) para teoria de placas finas. Considerando-se apenas o primeiro termo de cada série e  $\nu = 0.300$  resulta em (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959)

$$0.443 \left( \frac{w}{h} \right)^3 + \frac{w}{h} = 0.217 \frac{\bar{p} a^2}{E h^4}$$

(4.12)

e uma série truncada e  $\nu = 0.300$  resulta em (CHIA, 1980)

$$\frac{\bar{p} \, a^2}{E \, h^4} = 4.603 \, w + 2.048 \, w^3 - 0.1112 \, w^5 + 0.02009 \, w^7 + \dots$$

(4.13)

Novamente, para uma melhor visualização da performance do elemento finito de ordem superior (HOST) na solução de problemas com não-linearidade geométrica, os resultados adimensionais são mostrados na forma de um gráfico (Figura 4.7), juntamente com aqueles do elemento finito de primeira ordem (FOST) e os obtidos por Pica, Wood e Hinton (1980), Chia (1980) e Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).

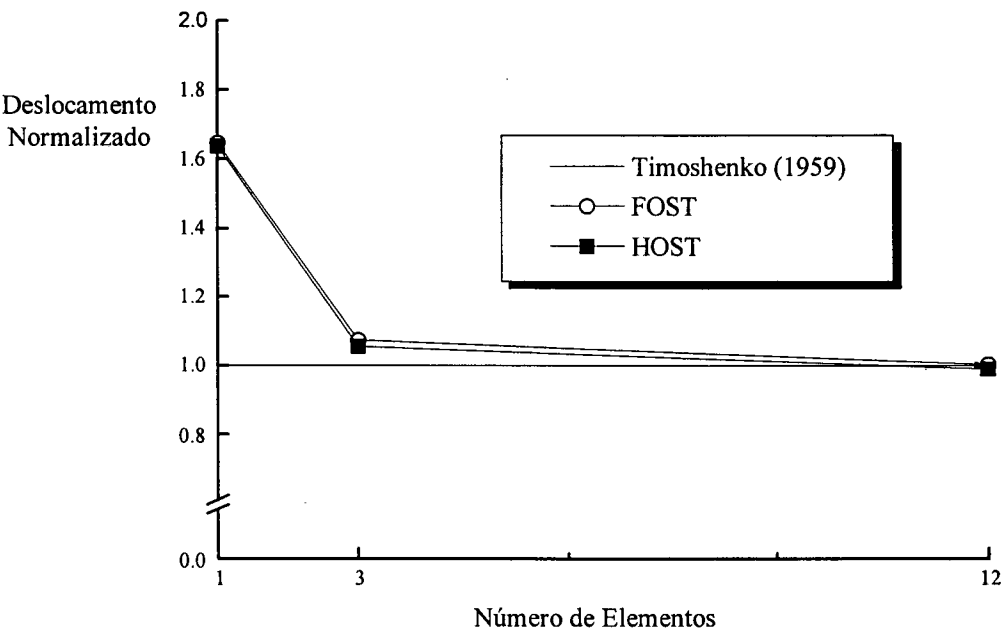


Figura 4.6 Análise da convergência h do deslocamento central com carga total.

A partir da análise dos resultados apresentados na Tabela 4.4 e no gráfico da Figura 4.7 pode-se observar que, mais uma vez, o programa HOST de ordem superior apresenta valores de deslocamentos transversais menores que aqueles obtidos com o

programa FOST de primeira ordem, corroborando novamente a afirmação feita por Kant (1982).

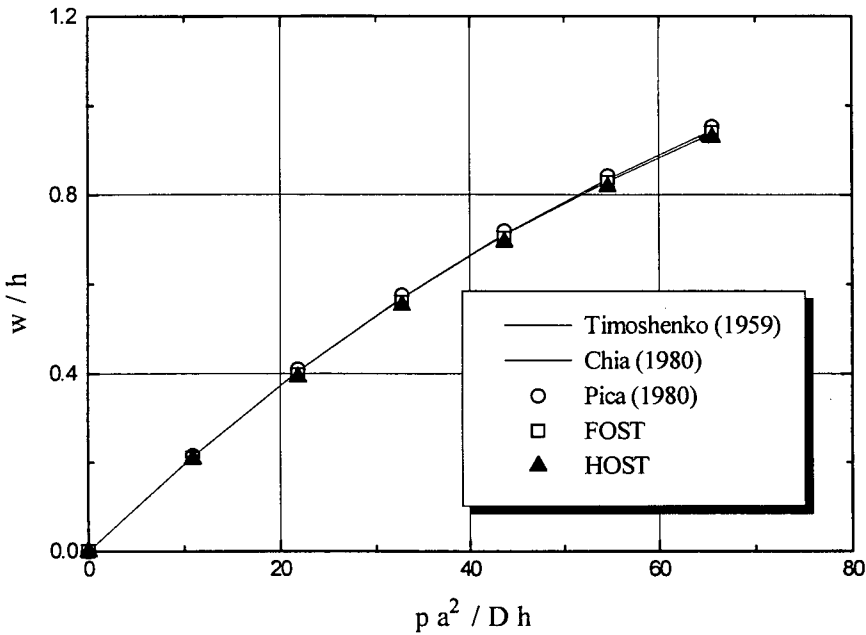


Figura 4.7 Deslocamento central de uma placa circular engastada.

Também aqui observa-se, nos resultados apresentados, que o elemento finito de ordem superior formulado neste trabalho possui ótima concordância com os resultados numéricos obtidos com o elemento finito de primeira ordem e aqueles obtidos por Pica, Wood e Hinton (1980), e também com os resultados analíticos apresentados por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e por Chia (1980)

Analisando o gráfico da Figura 4.6 pode-se observar novamente a rápida convergência  $h$  dos resultados tanto para o programa HOST quanto para o programa FOST. Verifica-se ainda que, também aqui, a curva de convergência para o programa HOST situa-se abaixo daquela obtida para o programa FOST, mostrando novamente a validade da conclusão apresentada na Seção 4.4.1. Neste caso, para a malha com três elementos, o elemento de ordem superior resulta num erro de 5.15% enquanto que o elemento de primeira ordem resulta num erro de 6.86%, ambos analisados em relação ao resultado analítico (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

Desta forma, com base na análise dos resultados mostrados na Tabela 4.4 e nas Figuras 4.6 e 4.7 pode-se concluir novamente que a performance do programa HOST é muito boa para o problema selecionado. Validando o elemento HOST para solução de problemas com não-linearidade geométrica em malhas com elementos distorcidos.

As conclusões desta Seção juntamente com as da Seção anterior garantem a versatilidade e a confiabilidade da formulação do elemento finito baseado na teoria de ordem superior de Lo, Christensen e Wu (1977a), para solução de problemas com não-linearidades geométricas. Este resultado é muito importante pois, a partir de deslocamentos transversais maiores que 40% do valor da espessura da placa, i.e.,  $w/h \geq 0.4$ , a teoria linear não é mais capaz de representar o comportamento real da estrutura, tornando-se imprescindível a consideração de grandes deslocamentos, que introduzem não-linearidades geométricas, para a análise do comportamento da estrutura.

## 4.5. Exemplos Numéricos para Problemas Contato Unilateral

Nesta seção será discutida a validade, versatilidade e a credibilidade do elemento finito baseado na teoria de Lo, Christensen e Wu (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a) para solução de problemas com restrições de contato unilateral.

Para obter-se uma melhor análise da formulação utilizada, será realizada uma divisão dos problemas propostos em duas categorias. Inicialmente serão estudados problemas de estruturas submetidas a pequenos deslocamentos e posteriormente, estruturas submetidas a grandes deslocamentos. Para comparar os resultados obtidos nesta seção serão utilizados os trabalhos de Selke (1986), Selke e Kikuchi (1987), Luersen (1994), Ohtake, Oden e Kikuchi (1980), Luersen, Barp e Selke (1995) e Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).



### 4.5.1. Problemas Submetidos a Pequenos Deslocamentos

Conforme exposto anteriormente, estudar-se-á nesta seção problemas de estruturas, sujeitas à restrições de contato unilateral, submetidas a pequenos deslocamentos, utilizando o elemento finito formulado neste trabalho, com o objetivo de validá-lo para este tipo de problema.

Os resultados obtidos serão comparados com os resultados obtidos numericamente por Selke (1986) e Selke e Kikuchi (1987) para o problema da viga fletida contra uma superfície rígida e com os resultados obtidos analiticamente por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) para o problema da placa circular situada sobre uma superfície rígida.

#### 4.5.1.1. Análise Contato Unilateral de uma Viga

Uma viga, onde o carregamento e as propriedades da geometria e do material utilizado são apresentadas no conjunto de dados 4 (4.14), é analisada considerando-se que a viga esteja simplesmente suportada (4.2) e sujeita a momentos concentrados nas extremidades, de tal forma que ela seja fletida contra uma superfície rígida situada a uma distância  $d$  abaixo da sua posição de referência (Figura 4.8a).

Os resultados numéricos foram obtidos com a modelagem de apenas metade da viga, devido a simetria axial do problema, utilizando as condições de simetria (4.4) e uma malha com dezesseis elementos finitos ao longo do comprimento e um elemento finito na largura (Figura 4.8b).

**Conjunto de dados 4 (SELKE, 1986)**

Os dados para análise contato unilateral são:

Viga Isotrópica

$$L=2 \text{ cm}$$

$$b=0.2 \text{ cm}$$

$$h=0.2 \text{ cm}$$

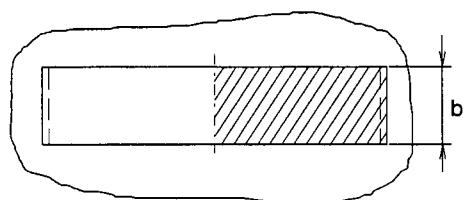
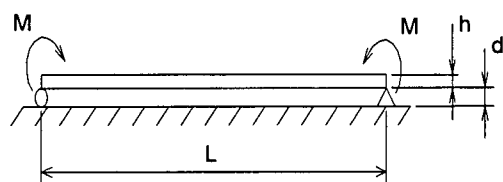
$$d=0.08 \text{ cm}$$

(4.14)

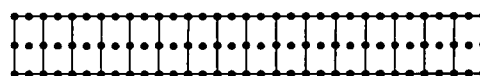
$$M=10.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

$$\nu=0.290$$

$$E = 2.1 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$$



(a)



16x1

(b)

Figura 4.8 (a) Viga simplesmente suportada sujeita a momentos concentrados nas extremidades - a região hachurada representa a metade discretizada.

(b) Discretização da metade da viga com 16 elementos finitos.

A Tabela 4.5 apresenta os deslocamentos de um ponto central da viga, em centímetros, bem como os valores correspondentes do momento concentrado  $M$ , em kiloNewton  $\times$  centímetro, aplicado na análise do problema de flexão de um viga simplesmente suportada.

Tabela 4.5 Deslocamento central de uma viga simplesmente suportada sujeita a um momento concentrado nas extremidades.

Momento M  KN.cm	Teoria Clássica  (SELKE, 1986)	Teoria Timoshenk o  (SELKE, 1986)	Teoria Essenburg  (SELKE, 1986)	FOST  16×1	HOST  16×1
0.4000	0.0715	0.0784	0.0706	0.07157	0.07073
0.4475	0.0799	0.0800	0.0790	0.07989	0.07909
0.4485	0.0800	0.0800	0.0792	0.08004	0.08003
0.4495	0.0800	0.0800	0.0800	0.08004	0.08003
0.5000	0.0800	0.0800	0.0800	0.08002	0.08001
2.5000	0.0800	0.0800	0.0800	0.08003	0.08001
3.0000	0.0800	0.0800	0.0800	0.08000	0.08000
3.5000	0.0800	0.0800	0.0799	0.08001	0.08000
4.0000	-	-	-	0.08000	0.07999
5.0000	0.0800	0.0800	0.0771	0.08000	0.07997
5.1800	0.0800	0.0800	0.0769	0.08000	0.07991
7.5000	0.0800	0.0800	0.0735	0.08000	0.07989
10.0000	0.0800	0.0800	0.0703	0.07999	0.07988

Os resultados obtidos com os programas HOST e FOST são comparados com os resultados obtidos numericamente por Selke (1986) e Selke e Kikuchi (1987), onde foram utilizadas a teoria clássica, a teoria de Timoshenko (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959; WASHIZU, 1982) e a teoria de Essenburg (ESSENBURG, 1975), para a formulação Lagrangiana atualizada de um elemento finito linear de viga, utilizado para modelar o problema da viga.

Para uma melhor visualização da performance do elemento finito de ordem superior (HOST) na solução de problemas com restrições de contato unilateral, os

resultados da modelagem do problema da viga, com dezesseis elementos de placa, são mostrados na forma de um gráfico (Figura 4.9), juntamente com aqueles do elemento finito de primeira ordem (FOST) e os retirados das soluções com elementos de viga (SELKE, 1986; SELKE e KIKUCHI, 1987).

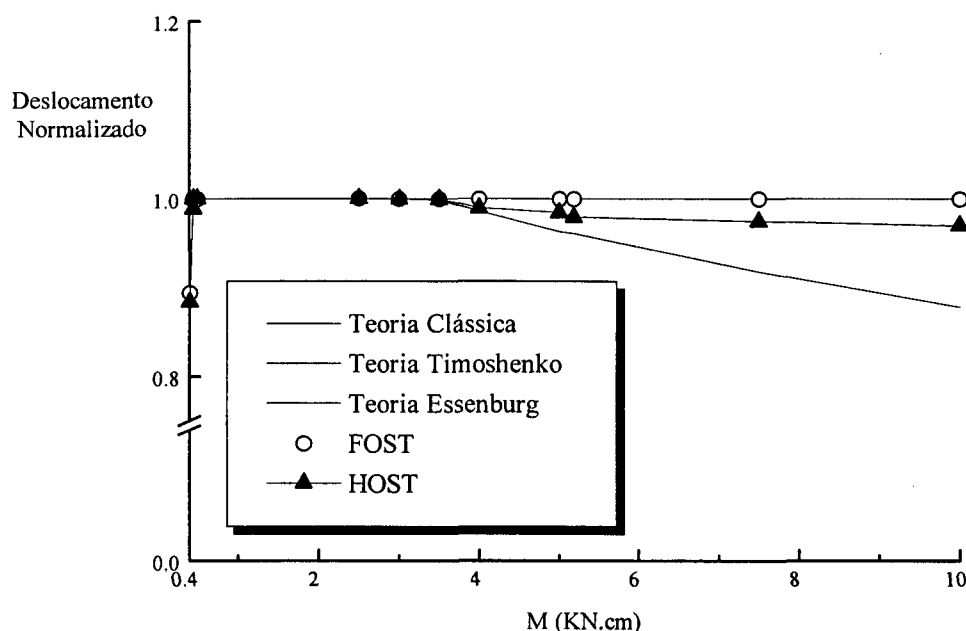


Figura 4.9 Deslocamento central de uma viga simplesmente suportada.

Tomando como parâmetro de análise os resultados apresentados na Tabela 4.5 e no gráfico da Figura 4.9, pode-se notar a superioridade do elemento finito baseado em teoria de ordem superior (HOST) sobre o elemento finito baseado em teoria de primeira ordem (FOST). Ficam claras as limitações da teoria de primeira ordem, onde não são consideradas as deformações normais transversais, as quais são de grande importância para solução deste tipo de problema, bem como as vantagens das teorias de ordem superior, onde as deformações normais transversais são levadas em consideração. Assim sendo, conclui-se que é possível a simulação do processo de separação do centro da viga, utilizando teorias de ordem superior.

Pode-se ainda observar, dos resultados apresentados anteriormente, que o momento concentrado nas extremidades, para o qual inicia-se a separação entre a

superfície rígida e a superfície inferior da viga, encontrado pelo programa HOST, foi de  $M^* = 4.0 \text{ KN} \cdot \text{cm}$  para o caso da viga analisada com dezesseis elementos finitos de ordem superior para placa. Nos trabalhos de Selke (1986) e Selke e Kikuchi (1987) pode-se observar que , quando é utilizada teoria de Essenburg (ESSENBURG, 1975) de ordem superior, o momento concentrado obtido, que causa a separação, foi de  $M^* = 3.5 \text{ KN} \cdot \text{cm}$ , para o caso da viga analisada com elementos finitos de ordem superior para viga. Também pode-se notar que a evolução do processo de separação entre viga e superfície rígida é bem representada, com o aumento do momento concentrado.

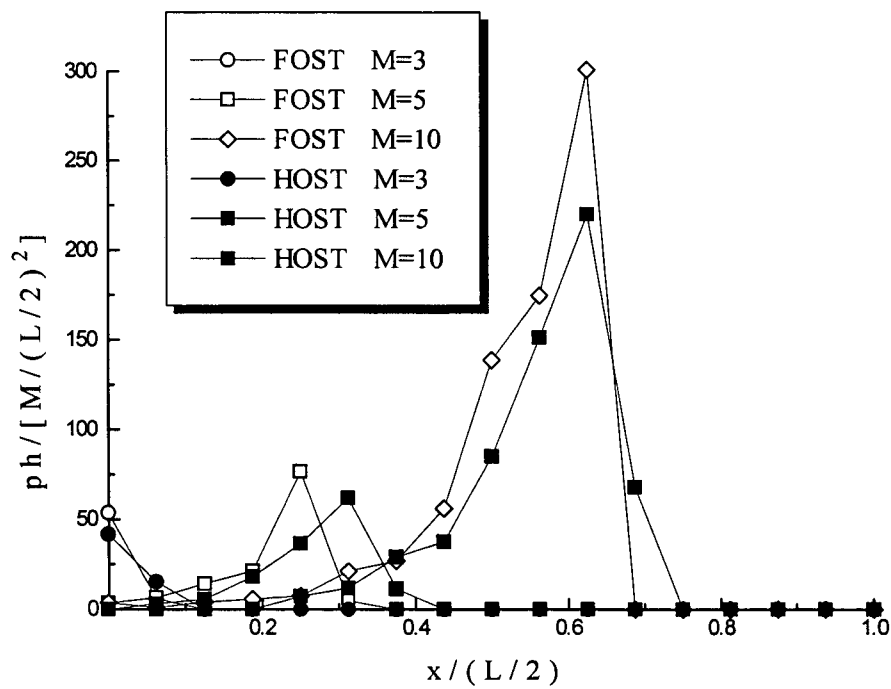


Figura 4.10 Distribuições de pressões de contato ao longo da viga para o programa FOST e para o programa HOST.

A diferença apresentada para o momento concentrado que causa a separação entre viga e superfície rígida, bem como a diferença na representação na evolução do processo de separação, comparando-se os resultados de Selke e Kikuchi (1987) com os resultados do programa HOST, devem-se a inúmeros fatores, como por exemplo, o

fato de estar modelando uma viga com um elemento finito formulado a partir de uma teoria de placa, as restrições do algoritmo de contato que foi utilizado para resolver a desigualdade variacional (2.52), as restrições do 'solver' utilizado para solução do problema, entre outros.

Um algoritmo mais eficiente como, por exemplo, os algoritmos propostos por Riks (1972, 1979, 1984) e Crisfield (1978, 1981) poderiam ser de grande importância para auxiliar na solução das diferenças apresentadas.

Um gráfico da distribuição de pressão adimensional ao longo da viga, iniciando-se no ponto central até uma extremidade, é apresentado na Figura 4.10. Nele são mostradas três curvas, cada uma para um valor de momento  $\bar{M}$  normalizado com respeito ao valor  $M^*$ , onde  $M^*$  é o momento para o qual inicia o contato. Tais valores, são considerados o mesmo para todas teorias.

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos com a presente formulação, são reproduzidos no gráfico da Figura 4.11, os resultados apresentados por Naghdi e Rubin (1989), onde este problema foi solucionado analiticamente utilizando diferentes teorias. Basicamente a Figura 4.11 mostra a distribuição das pressões de contato normalizadas por  $M/(L/2)^2$  para três valores momento  $\bar{M}$  em cada uma das três teorias, a saber, T é a teoria de Timoshenko para vigas onde considera-se somente o efeito da deformação cisalhante transversal, N é a teoria da normal onde considera-se somente o efeito da deformação normal transversal e G é a teoria generalizada onde considera-se tanto a deformação normal transversal quanto a deformação cisalhante transversal. Maiores detalhes sobre a análise podem ser verificados em Naghdi e Rubin (1989).

Analisando o gráfico da Figura 4.10 pode-se notar novamente a flagrante superioridade do elemento de ordem superior, programa HOST, sobre o elemento de primeira ordem, programa FOST, quando comparados com os resultados apresentados por Naghdi e Rubin (1989) no gráfico da Figura 4.11. Observa-se uma considerável semelhança entre o comportamento das curvas do programa FOST (Figura 4.10) com as curvas relativas a teoria de Timoshenko (Figura 4.11) e da mesma forma, o

comportamento das curvas do programa HOST (Figura 4.10) com as curvas relativas a teoria generalizada (Figura 4.11). As diferenças observadas em relação a solução analítica ocorrem, e são inevitáveis pois, com o algoritmo de contato utilizado, existe uma grande sensibilidade dos valores de pressão de contato com relação as variações do fator de penalidade (LUERSEN, 1994).

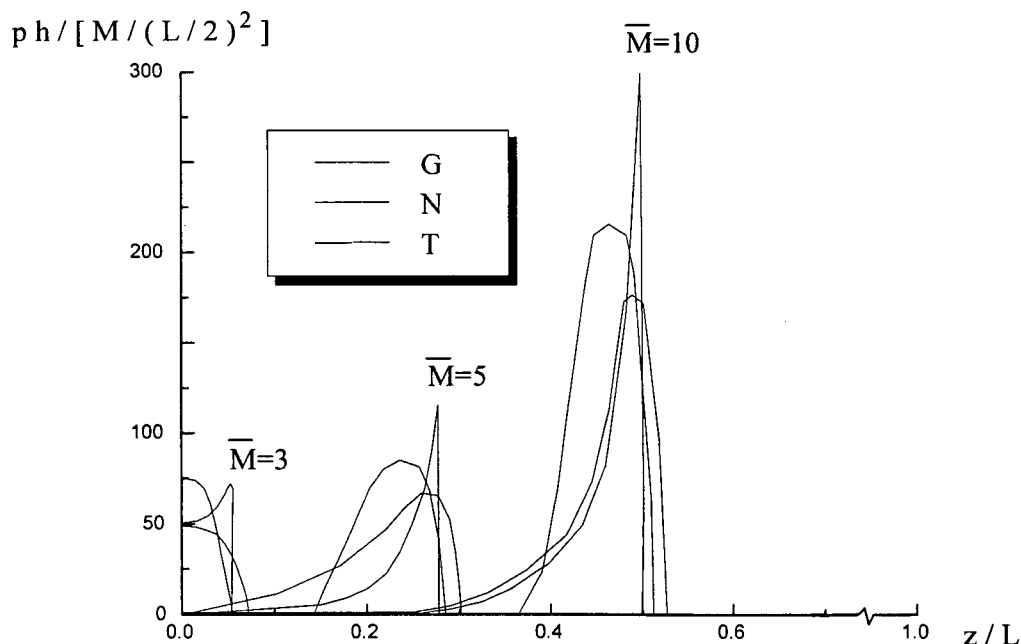


Figura 4.11 Distribuições de pressões ao longo da viga segundo Naghdi e Rubin (1989), página 253, Figura 3.

#### 4.5.1.2. Análise Contato Unilateral de uma Placa Circular

Será analisado o problema de uma base de reservatório cilíndrico, modelada como se fosse uma placa circular, onde o carregamento e as propriedades da geometria e do material utilizado são apresentadas no conjunto de dados 5 (4.15), é analisada considerando que esteja simplesmente suportada (4.2), sujeita a uma condição de carregamento composta de um carregamento distribuído em sua superfície e de um momento distribuído em toda borda da placa. Está fica situada sobre uma superfície

horizontal rígida. Os resultados numéricos foram obtidos com a modelagem de apenas um quadrante da placa, devido a simetria biaxial do problema (Figura 4.12a), utilizando as condições de simetria (4.4) e uma malha com 64 elementos finitos (Figura 4.12b).

**Conjunto de dados 5 (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959)**

Os dados para análise contato unilateral são:

Placa Circular Isotrópica

$$a=50$$

$$h=1.0$$

$$d=0.0$$

$$q=1.0 \text{ e } M=350.0$$

$$\nu=0.300$$

$$E = 2.1 \times 10^7$$

(4.15)

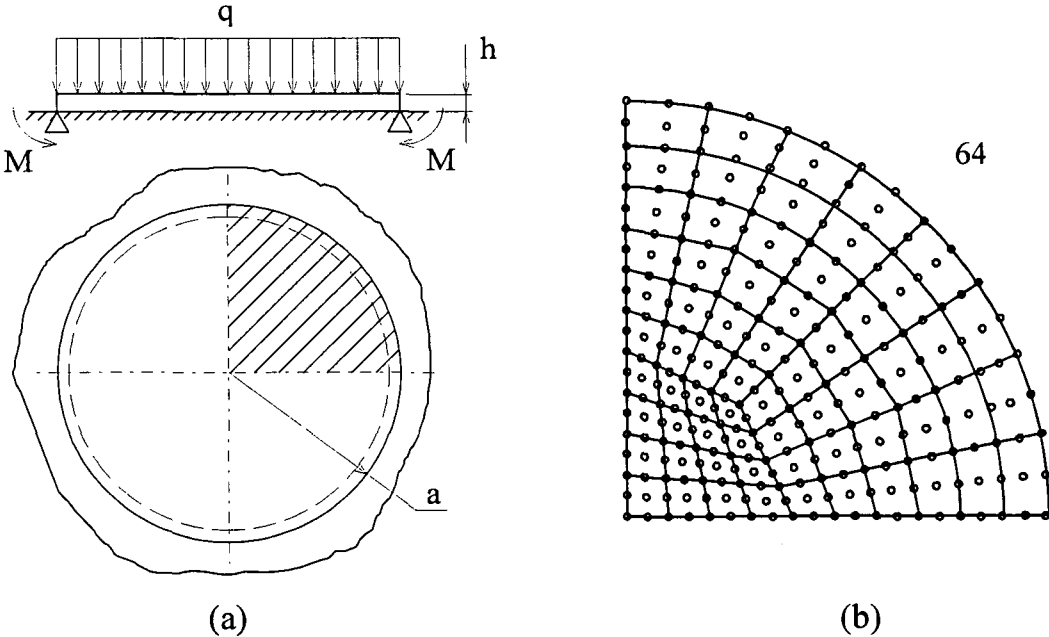


Figura 4.12 (a) Placa circular simplesmente suportada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e a um momento distribuído na borda.  
(b) Discretização de um quadrante da placa com 64 elementos finitos.



Os resultados obtidos com os programas HOST e FOST são comparados com os resultados analíticos, para problemas de flexão em placas circulares submetidas a pequenos deslocamentos e sujeitas à restrições de contato, obtidos por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) para teoria de placas finas.

Considerando-se a solução para uma placa circular com carregamento uniforme dada por (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER, 1959)

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{q a^4}{64 D}, \quad (4.16)$$

com as condições de contorno, para o círculo de raio  $a$ , dadas por

$$(w)_{r=a} = 0 \quad \text{e} \quad (M_r)_{r=a} = -M, \quad (4.17)$$

e as condições de contorno para o círculo de raio  $b$  dadas por

$$(w)_{r=b} = 0, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=b} = 0 \quad \text{e} \quad (M_r)_{r=b} = 0, \quad (4.18)$$

obtem-se o seguinte sistema de equações não-lineares

$$C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a = -\frac{q a^4}{64 D} \quad (4.19a)$$

$$C_1 + C_2 \ln b + C_3 b^2 + C_4 b^2 \ln b = -\frac{q b^4}{64 D} \quad (4.19b)$$

$$\frac{C_2}{b} + 2 C_3 b + C_4 b (2 \ln b + 1) = -\frac{q b^3}{16 D} \quad (4.19c)$$

$$\frac{C_2 (v-1)}{a^2} + 2 C_3 (v+1) + C_4 (3 + v + 2 \ln a (1+v)) = -\frac{q a^2}{16 D} + \frac{M}{D} \quad (4.19d)$$

$$\frac{C_2 (v-1)}{b^2} + 2 C_3 (v+1) + C_4 (3+v+2 \ln b (1+v)) = -\frac{q b^2}{16 D} \tag{4.19e}$$

onde D é a rigidez à flexão da placa (4.8) e b é a região que permanecerá em contato com a superfície rígida para um dado valor do momento M. A solução das equações (4.19), apresentada no gráfico, foi obtidas através da solução numérica com o MathCad V.4.0, onde os valores obtidos para as constantes C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub> e b foram os seguintes C<sub>1</sub> = -3.75·10<sup>-6</sup>, C<sub>2</sub> = -6.65·10<sup>-5</sup>, C<sub>3</sub> = 1.96·10<sup>-5</sup>, C<sub>4</sub> = -1.02·10<sup>-5</sup> e b = 2.583.

O gráfico da Figura 4.13 apresenta os resultados obtidos com a análise do problema da flexão de uma placa circular simplesmente suportada situada sobre uma superfície rígida. O carregamento uniformemente distribuído e o momento concentrado na borda foram divididos em dez passos, sendo apresentado no gráfico somente o resultado final da análise.

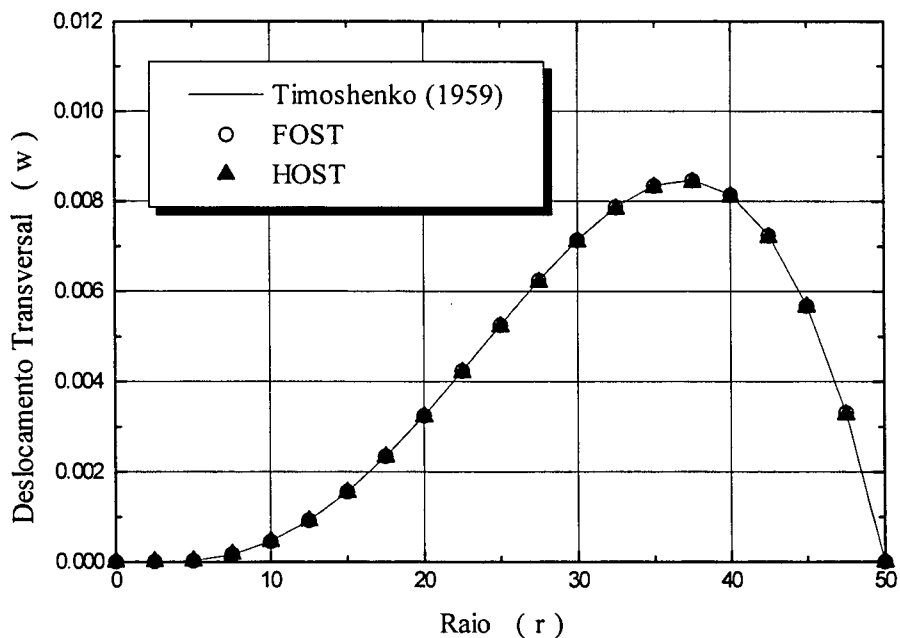


Figura 4.13 Deslocamentos transversais ao longo do raio referentes a placa circular situada sobre uma superfície rígida.

Analizando os resultados apresentados no gráfico da Figura 4.13 pode-se observar que existe uma ótima concordância entre os resultados obtidos com o elemento finito de ordem superior, programa HOST, com o elemento finito de primeira ordem, programa FOST (LUERSEN, BARP e SELKE, 1995), comparados com os resultados analíticos apresentados por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), verificando-se novamente a excelente performance do programa HOST.

Deve-se observar ainda que os deslocamentos transversais da placa possuem direção oposta daquela onde é aplicado o carregamento transversal uniformemente distribuído. Esta configuração ocorre devido a aplicação do momento concentrado na borda da placa. Nota-se também, que uma pequena região central da placa é mantida em contato com a superfície rígida. Esta região é determinada pelo raio  $b$  o qual foi determinado analiticamente para um momento  $M = 350.0$  como sendo  $b = 2.583$ . Comparando este resultado com os obtidos numericamente pode-se verificar que tanto o programa HOST quanto o FOST mostram ótima concordância com este resultado, pois  $w = 0.0$  para  $r = 0.0$  e  $r = 2.5$ . Já para  $r = 5.0$  tem-se  $w = 2.1 \cdot 10^{-5}$ , para ambos os programas, mostrando o início da separação entre a placa e a superfície rígida (Figura 4.13).

Também observa-se no gráfico que a curva apresentada para o programa FOST é situada levemente acima daquela para o programa HOST. Mostrando que, conforme poderia-se esperar novamente, o resultado para o elemento de ordem superior é menos flexível do que aquele obtido com o elemento de primeira ordem, corroborando, mais uma vez, com a afirmação feita por Kant (1982).

#### 4.5.2. Problemas Submetidos à Grandes Deslocamentos

Nestas seção, serão apresentados problemas de estruturas, sujeitas à restrições de contato unilateral e submetidas a grandes deslocamentos, os quais serão resolvidos numericamente com o elemento finito formulado neste trabalho com o objetivo de validá-lo para esta categoria de problemas.

Os resultados obtidos serão comparados com os resultados obtidos numericamente por Ohtake, Oden e Kikuchi (1980a, 1980b) tanto para o problema da viga simplesmente suportada quanto para o da placa quadrada engastada e simplesmente suportada, ambos sujeitos a condições de contato unilateral.

#### 4.5.2.1. Análise Contato Unilateral de uma Viga

Uma viga, onde o carregamento e as propriedades da geometria e do material utilizado são apresentadas no conjunto de dados 6 (4.20), é analisada considerando que ela esteja simplesmente suportada (4.2) com um carregamento uniformemente distribuído sujeita a uma restrição de contato unilateral (Figura 4.14a). Os resultados numéricos foram obtidos com a modelagem de apenas a metade da viga, devido a simetria axial, utilizando as condições de simetria (4.4) e malhas com 4, 8 e 10 elementos finitos ao longo do comprimento e um elemento finito na largura (Figura 4.14b).

##### **Conjunto de dados 6 (OHTAKE, ODEN e KIKUCHI, 1980b)**

Os dados para análise contato unilateral são:

Viga Isotrópica

$L=200$  mm

$b=10$  mm

$h=2$  mm

$d=5$  mm

$q=0.050$  kgf/mm<sup>2</sup>

$\nu=0.300$

$E = 7.0 \times 10^3$  kgf/mm<sup>2</sup>

(4.20)

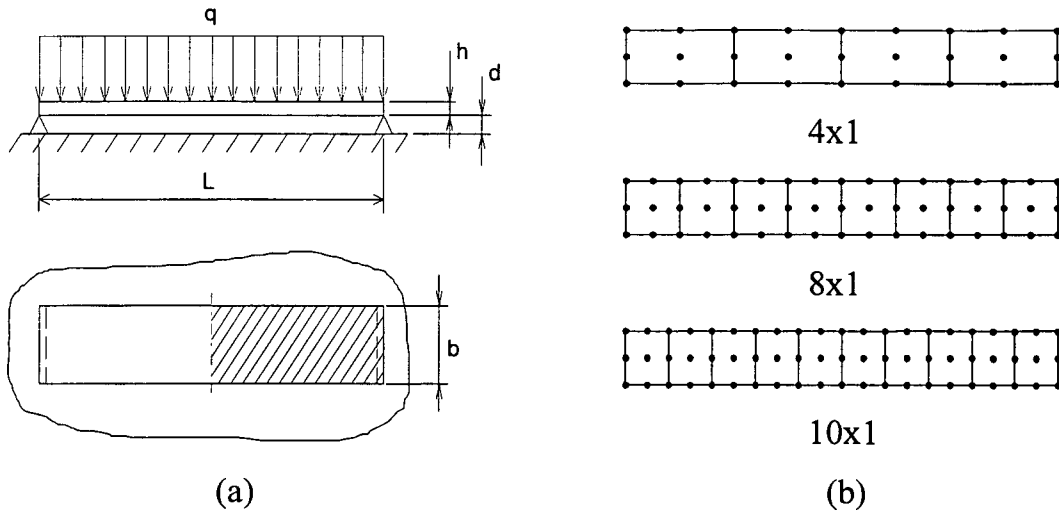


Figura 4.14 (a) Viga simplesmente suportada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído - a região hachurada representa a metade discretizada.  
(b) Discretização da metade da viga com 4, 8 e 10 elementos finitos.

Os resultados obtidos com os programas HOST e FOST são comparados com os resultados obtidos numericamente por Ohtake, Oden e Kikuchi (1980b), onde foi utilizada a teoria de von Kármán, a qual baseia-se na hipótese de Kirchhoff, e o método da penalidade para formular um elemento finito de placa com dezesseis graus de liberdade, aplicado na modelagem do problema de viga.

O gráfico da Figura 4.15 apresenta os resultados obtidos com a solução do problema da flexão de uma viga simplesmente suportada contra uma superfície rígida. O carregamento uniformemente distribuído foi dividido em dez passos, sendo apresentado no gráfico somente o resultado final da solução.

Com base no que foi mostrado no gráfico da Figura 4.15 verifica-se que, com o refino da malha, ocorre uma ótima concordância entre os resultados obtidos com o programa HOST, o programa FOST e em relação aos resultados numéricos apresentados por Ohtake, Oden e Kikuchi (1980), observando-se mais uma vez, a excelente performance do programa HOST.

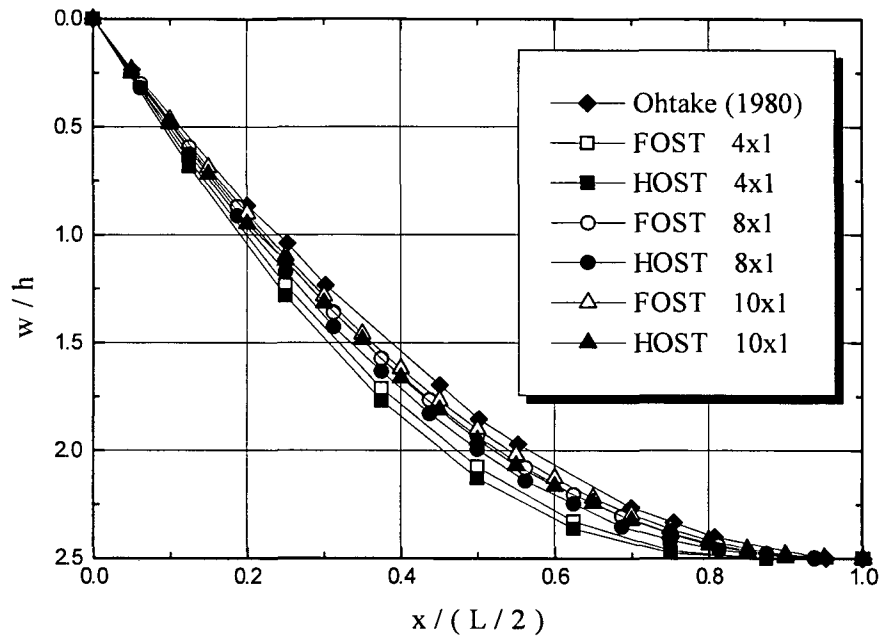


Figura 4.15 Deslocamentos transversais da flexão de uma viga simplesmente suportada contra uma superfície rígida.

Cabe aqui salientar que, conforme observado por Luersen (1994) e Luersen Barp e Selke (1995), os resultados apresentados por Ohtake, Oden e Kikuchi (1980b) são para uma viga simplesmente suportada e não para uma viga engastada.

4.5.2.2. Análise Contato Unilateral de uma Placa Retangular

Uma placa quadrada, onde o carregamento e as propriedades da geometria e do material utilizado são apresentadas no conjunto de dados 7 (4.21), é analisada com dois tipos de condições de contorno, i.e., simplesmente suportada (4.2) e engastada (4.3). Os resultados numéricos foram obtidos com a modelagem de apenas um quadrante da placa, devido a simetria biaxial do problema, utilizando as condições de

simetria (4.4) e malhas regulares com dezesseis e vinte cinco elementos finitos (Figura 4.16). A placa quadrada foi submetida a um carregamento uniformemente distribuído, que flexiona a placa contra uma superfície rígida.

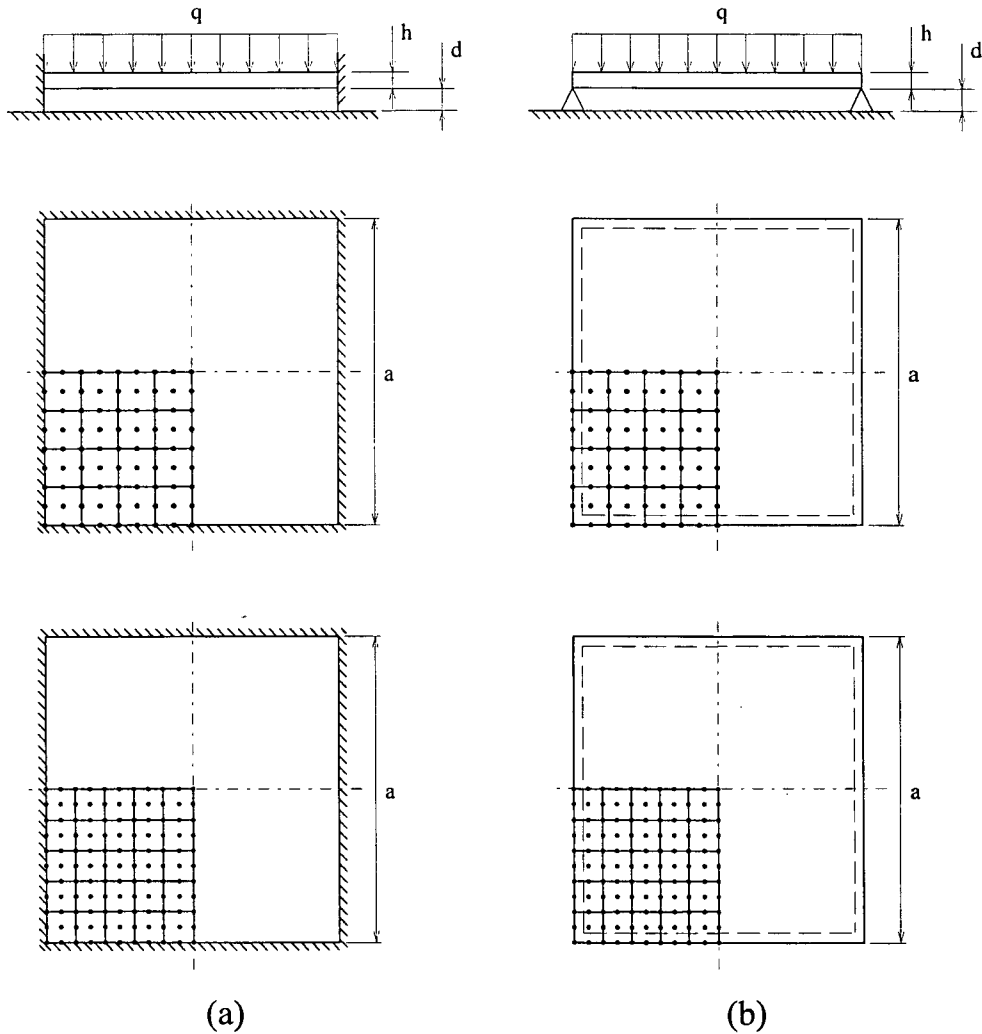


Figura 4.16 Placa quadrada engastada (a) e simplesmente suportada (b) sujeita a um carregamento uniformemente distribuído (um quadrante modelado com 16 e 25 elementos).

**Conjunto de dados 7 (OHTAKE, ODEN e KIKUCHI, 1980b)**

Os dados para análise contato unilateral são:

Placa Quadrada Isotrópica

a=120 mm

h=2 mm

d=2 mm

q=100.0 kgf/mm<sup>2</sup>

υ=0.300

E = 7.0 × 10<sup>3</sup> kgf/mm<sup>2</sup>

(4.21)

Os resultados obtidos com a solução do problema da flexão de uma placa contra um superfície rígida são mostrados nos gráficos da Figura 4.17, para uma placa engastada, e da Figura 4.18, para uma placa simplesmente suportada. Novamente o carregamento uniformemente distribuído foi dividido em dez passos, sendo apresentado nos gráficos somente os resultados para o carregamento total.

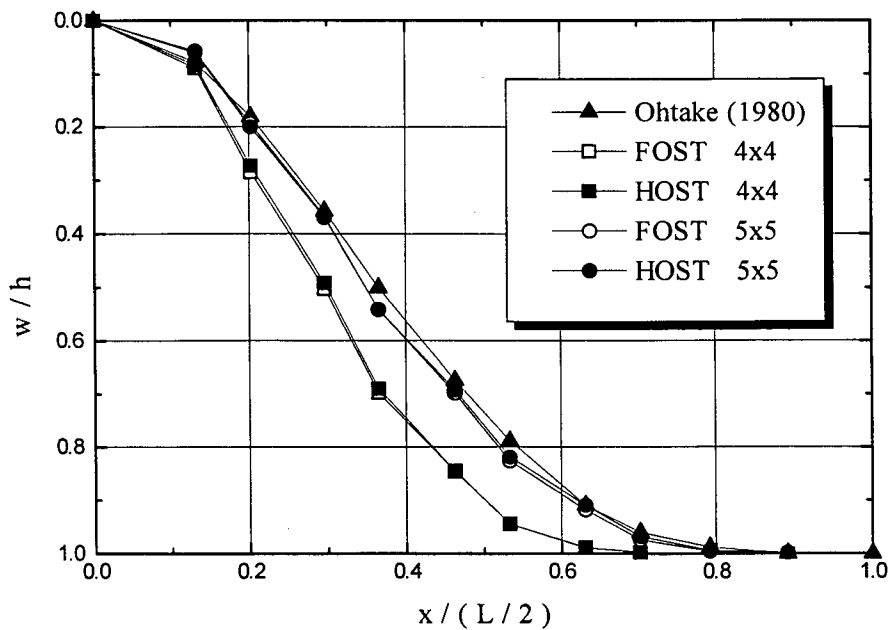


Figura 4.17 Deslocamentos transversais da flexão de uma placa engastada contra uma superfície rígida.



Novamente, com base no que foi mostrado nos gráficos das Figuras 4.17 e 4.18 verifica-se que refinando a malha, ocorre uma ótima concordância entre os resultados obtidos com o programa HOST, o programa FOST e em relação aos resultados numéricos apresentados por Ohtake, Oden e Kikuchi (1980b), observando-se mais uma vez, a excelente performance do programa HOST.

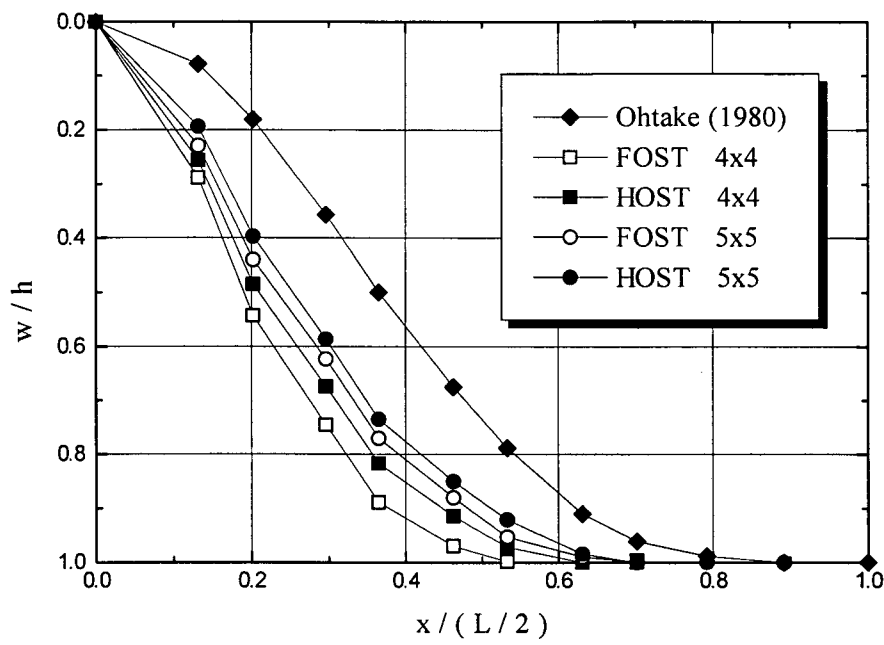


Figura 4.18 Deslocamentos transversais da flexão de uma placa simplesmente suportada contra uma superfície rígida.

As diferenças observadas entre as soluções numéricas HOST e Ohtake são devidas ao fato de que Ohtake, Oden e Kikuchi (1980b) utilizaram uma teoria de placas finas onde os efeitos das deformações transversais, cisalhante e normal, não são consideradas. Cabe aqui salientar que, conforme observado nas Figuras 4.17 e 4.18 e por Luersen (1994) e Luersen, Barp e Selke (1995), os resultados apresentados por Ohtake, Oden e Kikuchi (1980) são para uma placa quadrada engastada e não para uma placa quadrada simplesmente suportada.

# CAPÍTULO 5

## Conclusões

### 5.1. Comentários Finais

O objetivo deste trabalho foi a formulação e a implementação de um elemento finito de placa semi-espessa, utilizando a teoria de placas de ordem superior de Lo, Christensen e Wu (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a, 1977b), para solução de problemas estruturais com não-linearidade geométrica e com não-linearidade oriunda de restrições unilaterais de contato. Uma formulação Lagrangiana incremental atualizada, baseada na versão incremental do princípio dos trabalhos virtuais, foi utilizada para formular o problema. Tal formulação foi adotada por oferecer maior facilidade na obtenção de resultados intermediários e também devido ao menor esforço computacional requerido.

Da consideração das condições de contato unilateral resulta uma desigualdade variacional. Para solução desta desigualdade variacional, que é intrínseca ao problema de contato unilateral, foi utilizado o método da penalidade através do qual é possível transformar uma desigualdade em uma igualdade variacional. Um código computacional foi desenvolvido, utilizando um compilador FORTRAN, com o qual foram obtidas soluções numéricas de problemas clássicos. Estas soluções foram comparadas com resultados analíticos e/ou numéricos encontrados na bibliografia disponível, demonstrando assim o campo de aplicabilidade, as limitações do método da penalidade e do algoritmo de Newton-Raphson e as vantagens do uso de uma teoria de placas de ordem superior.

A principal limitação do algoritmo e do método utilizado está apresentado no Capítulo 4 - Seção 4.5.1.1. - onde discute-se a análise de contato unilateral de uma viga. Observa-se então, que a representação do processo evolutivo, após a ocorrência da separação da região central da placa, com o aumento do momento concentrado, não é realizada da forma esperada. Tal fenômeno está claramente apresentado nos trabalhos analíticos de Essenburg (1975) e Naghdi e Rubin (1989) e numéricos de Selke (1986) e Selke e Kikuchi (1987). Uma possível alternativa para contornar este inconveniente, seria adotar outro método para solução da desigualdade variacional como por exemplo, o método Lagrangiano aumentado (FANCELO, 1993) e também, um algoritmo mais eficiente, como, por exemplo, os algoritmos propostos por Riks (1972, 1979, 1984) e Crisfield (1979, 1981).

Todas as demais soluções numéricas apresentadas no capítulo 4, considerando as análises lineares, de não-linearidade geométrica e de contato unilateral, mostraram-se em grande concordância quando comparadas com as soluções analíticas e numéricas obtidas na bibliografia disponível.

## 5.2. Sugestões para Futuros Desenvolvimentos

Como em todo trabalho de pesquisa a experiência adquirida permite apresentar algumas sugestões de tópicos onde é importante dar continuidade ao desenvolvimento deste trabalho e de outros que sigam a mesma linha de pesquisa. Entre estas sugestões, destacam-se:

- 1 - Solução da desigualdade variacional através de um método matemático que seja mais estável no decorrer do processo, por exemplo, o método Lagrangiano aumentado.

2 - Implementação de um novo algoritmo para solução da equação não-linear de elementos finitos, como, por exemplo, um algoritmo baseado nos métodos de Riks e de Crisfield.

3 - Estender o trabalho de forma a incluir-se os efeitos de não-linearidade material, introduzindo as características do material através dos tensores de taxa de tensão  $\times$  deformação, como, por exemplo, a plasticidade e/ou a hiperelasticidade.

4 - Formular um elemento de casca com teoria de ordem superior considerando as restrições de contato unilateral, visando uma maior abrangência prática do trabalho.

5 - Implementar um esquema de escolha automática do fator de penalidade, variando-o ao longo do processo iterativo, visto que a rigidez também é alterada durante o processo, e retirando esta incumbência do usuário.

6 - Pesquisar estimadores de erro que sejam compatíveis com a consideração das restrições unilateral de contato, para posteriormente analisar a viabilidade da implementação de refinamentos automáticos adaptativos de malha (Método -h) na região do contato.

7 - Aplicar a formulação para solução de problemas de placas laminadas compostas ou reforçadas, onde as vantagens da teoria de ordem superior tornam-se muito mais evidentes.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] Averill, R.C. e Reddy, J.N. (1992): **An Assessment of Four Noded Plate Finite Elements Based on a Generalized Third Order Theory**, Int. J. Num. Meth. Engng., 33, 1553-1572.
- [02] Atkin, R.J. e Fox, N. (1980): **An Introduction to the Theory of Elasticity**, Logman Englewood Cliffs, London.
- [03] Bathe, K.J. (1982): **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [04] Benedetti, D., Brebbia, C. e Cedolin, L. (1972): **Geometrical Non-Linear Analysis of Structures by Finite Elements**, Meccanica, March, 35-44.
- [05] Belytschko, T., Liu, W.K., Ong, J.S. e Lam, D. (1985): **Implementation and Application of a 9 node Lagrange Shell Element with Spurious Mode Control**, Comput. Structures, 20, No. 1-3, 121-128.
- [06] Boresi, P.A. e Lynn, P.P. (1974): **Elasticity in Engineering Mechanics**, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [07] Campos, L.T., Oden J.T. e Kikuchi, N. (1982): **A Numerical Analysis of a Class of Contact Problems with Friction in Elastostatics**, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 34, 821-845.
- [08] Carey, G.F. e Oden, J.T. (1983): **Finite Elements: a Second Course**, Vol. II, Prentice-Hall, New Jersey.
- [09] Chia, C.Y. (1980): **Nonlinear Analysis of Plates**, McGraw Hill, Inc.
- [10] Cook, D.R., Malkus, D.S. e Plesha, M.E. (1988): **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, 3rd Edition, John Wiley e Sons, New York.

- [11] Crisfield, M.A. (1979): **A Faster Modified Newton-Raphson Iteration**, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 20, 267-278.
- [12] Crisfield, M.A. (1981): **A Faster Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles “Snap-Through”**, Comp. Structures, 13, 55-62.
- [13] Duvaut, G. e Lions, J.L. (1974): **Problemes Unilateraux dans la Theorie de la Flexion Forte des Plaques**, J. Mecanique, No. 13, p. 51-74.
- [14] Duvaut, G. e Lions, J.L. (1976): **Inequalities in Mechanics and Physics**, Springer-Verlag, Berlin.
- [15] Essenburg, F. (1962): **On Surface Constraints in Plate Problems**, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 29, 342-344.
- [16] Essenburg, F. (1975): **On the Significance of the Inclusion of the Effect of Transverse Normal Strains in Problems Involving Beams with Surface Constraints**, J. Appl. Mech., 42, No. 1, 127-132.
- [17] Fancello, E.A. (1993): **Análise de Sensibilidade, Geração Adaptativa de Malhas e o Método dos Elementos Finitos na Otimização de Forma em Problemas de Contato e Mecânica da Fratura**, Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro.
- [18] Feijóo, R.A. (1987): **Formulacion y Resolucion via Programacion Matemática del Problema de Contacto Elastoplástico con Friccion**, COBEM 87 - IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, Dezembro, 1987, Vol. I, 15-26.
- [19] Fonseca, J.S.O. (1990): **Uma Formulação de Elementos Finitos Sólidos para Problemas com Não-Linearidades Geométrica e Material**, Dissertação de Mestrado, CPGEM-UFSC, Florianópolis.
- [20] Fung, Y.C. (1965): **Foundations of Solid Mechanics**, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

- [21] Gadala, M.S., Dokainish M.A. e Oravas, G.A.E. (1984): **Formulation Methods of Geometric and Material Nonlinearity Problems**, Int. J. Num. Meth. Engng., 20, 887-914.
- [22] Gadala, M.S. e Oravas, G.A.E. (1984): **Numerical Solutions of Nonlinear Problems of Continua - I**, Comput. Structures, 19, No. 5/6, 865-877.
- [23] Gupta, A.K. e Mohraz, B. (1972): **A Method of Computing Numerically Integrated Stiffness Matrices**, Int. J. Num. Meth. Engng., 5, 83-89.
- [24] Hinton, E. e Campbell, J.S. (1974): **Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method**, Int. J. Num. Meth. Eng., 8, 461-480.
- [25] Hughes, T.J.R. e Cohen M. (1978): **The “Heterosis” Finite Element for Plate Bending**, Comput. Structures, 9, 445-450.
- [26] Hughes, T.J.R., Cohen, M. e Haroun, M. (1978): **Reduced and Seletive Integration Techniques in Finite Element for Plate Bending**, Nuclear Engng. and Design, 46, 203-222.
- [27] Hughes, T.J.R. e Tezduyar, T.E. (1981): **Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the 4 Node Bilinear Isoparametric Element**, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 48, 587-596.
- [28] Kant, T. (1982): **Numerical Analysis of Thick Plates**, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 31, 1-18.
- [29] Kant, T. (1994): **Comunicações Pessoais em 03/Outubro e em 14/Novembro**, Indian Intitute of Technology, Powai, India.
- [30] Kant, T. e Kommineni, J.R. (1992): **C° Finite Element Geometrically Non-Linear Analysis of Fibre Reinforced Composite and Sandwich Laminates Based on a Higher Order Theory**, Comput. Structures, 45, No. 3, 511-520.

- [31] Kant, T. e Kommineni, J.R. (1994): **Geometrically Non-Linear Analysis of Symmetrically Laminated Composite and Sandwich Shells with a Higher Order Theory and C° Finite Element**, Compos. Structures, 27, 403-418.
- [32] Kant, T., Owen, D.R.J. e Zienkiewicz, O.C. (1982): **A Refined Higher Order C° Plate Bending Element**, Comput. Structures, 15, No. 2, 177-183.
- [33] Kant, T., Varaiya, J.H. e Arora, C.P. (1990): **Finite Element Transient Analysis of Composite and Sandwich Plates Based on a Refined Theory and Implicit Time Integration Schemes**, Comput. Structures, 36, No. 3, 401-420.
- [34] Kalker, J.J. (1988): **Contact Mechanical Problems**, Comm. Appl. Num. Meth., 4, 25-32.
- [35] Kardestuncer, H. (1987): **Finite Element Handbook**, McGraw-Hill, Inc., New York.
- [36] Kikuchi, N. e Oden, J.T. (1984): **Contact Problems in Elastostatics**, em "Finite Elements - Special Problems in Solid Mechanics", Vol.V, J.T. Oden and G.H. Carey, Cap. 4, Prentice Hall, New Jersey.
- [37] Kikuchi, N. e Oden, J.T. (1988): **Contact Problems in Elastostatics**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [38] Kikuchi, N. e Song, Y.J. (1981): **Penalty/Finite Element Approximations of a Class of Unilateral Problems in Linear Elasticity**, Q. Appl. Math., Vol. XXXIX, 1-22.
- [39] Kommineni J.R. e Kant, T. (1993): **Geometrically Non-Linear Transient C° Finite Element Analysis of Composite and Sandwich Plates with a Refined Theory**, Struc. Engng. Mech., 1, No. 1, 87-102.
- [40] Kuppusamy, T. e Reddy, J.N. (1984): **A Three-Dimensional Non-Linear Analysis of Cross-Ply Rectangular Composite Plates**, Comput. Structures, 18, No. 2, 263-272.



- [41] Levesque, J.M. e Williamson, J.W. (1989): **A Guidebook to FORTRAN on Supercomputers**, Academic Press, Inc., New York.
- [42] Liangxin, S. e Zhiyu, S. (1992): **The Analysis of Laminated Composite Plates Based on the Simple Higher Order Theory**, Comput. Structures, 43, No. 5, 831-837.
- [43] Lo, K.H., Christensen, R.M. e Wu, E.M. (1977a): **A High Order Theory of Plate Deformation Part 1: Homogeneous Plates**, J. Appl. Mech., 44, No. 4, 663-668.
- [44] Lo, K.H., Christensen, R.M. e Wu, E.M. (1977b): **A High Order Theory of Plate Deformation Part 2: Laminated Plates**, J. Appl. Mech., 44, No. 4, 669-676.
- [45] Lo, K.H., Christensen, R.M. e Wu, E.M. (1978): **Stress Solution Determination for High Order Plate Theory**, Int. J. Solids Structures, 14, 655-662.
- [46] Luersen, M.A. (1994): **Problemas de Contato Unilateral em Placas Semi-Espessas Sujeitas a Grandes Deflexões**, Dissertação de Mestrado, CPGEM-UFSC, Florianópolis.
- [47] Luersen, M.A., Barp, J.L. e Selke, C.A.C. (1995): **Local Unilateral Contact Problems in Plates Undergoing Large Deflections, Using a First Order Thick Plate Finite Element**, COBEM-CIDIM/95 - XIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica e II Congresso Ibero-Americano de Engenharia Mecânica, Belo Horizonte, Dezembro/1995, Anais.
- [48] Luersen, M.A. e Selke, C.A.C. (1994): **Uma Formulação Incremental de Elementos Finitos para Problemas de Contato Unilateral em Placas Semi-Espessas**, VI Congresso Chileno de Engenharia Mecânica, Santiago, 205-210.

- [49] Malkus, D.S. e Hughes, T.J.K. (1978): **Mixed Finite Element Methods - Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts**, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 15, 63-81.
- [50] Malvern, L.E. (1969): **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**, Prentice-Hall.
- [51] Mathies, H. e Strang, G. (1979): **The Solution of Non-Linear Finite Element Equations**, Int. J. Num. Meth. Eng., 14, 1613-1626.
- [52] Mindlin, R.D. (1951): **Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates**, J. Appl. Mech., 18, 31-38.
- [53] Mourão, R.P. e Selke, C.A.C. (1992): **Um Elemento Finito de Casca para Análise de Problemas com Não-Linearidade Geométrica**, Anais do VII SIBRAT, Florianópolis, Vol. I, 137-149.
- [54] Naghdi, P.M. e Rubin, M.B. (1989): **On the Significance of Normal Cross-Sectional Extension in Beam Theory with Application to Contact Problems**, Int. J. Solids Structures, 25, No. 3, 129-265.
- [55] Nelson, R.B. e Lorch, D.R. (1974): **A Refined Theory of Laminated Orthotropic Plates**, J. Appl. Mech., 41, No. 1, Trans. ASME, 177-183.
- [56] Noor, A. e Burton, W.S. (1989): **Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates**, Appl. Mech. Rev., 42, No. 1, 1-12.
- [57] Noor, A. e Hartley, S.J. (1978): **Evaluation of Element Stiffness Matrices on CDC Star-100 Computer**, Comput. Structures, 9, 151-161.
- [58] Oden, J.T. (1972): **Finite Elements of Nonlinear Continua**, McGraw-Hill.
- [59] Oden, J.T. e Kikuchi, N. (1982): **Finite Element Methods for Constrained Problems in Elasticity**, Int. J. Num. Meth. Eng., 18, 701-725.
- [60] Oden, J.T. e Reddy, J.N. (1976): **An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements**, John Wiley & Sons, New York.

- [61] Ohtake, K., Oden, J.T. e Kikuchi, N. (1980a): **Analysis of Certain Unilateral Problems in von Kármán Plate Theory by a Penalty Method Part 1 : A Variational Principle with Penalty**, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 24, 187-213
- [62] Ohtake, K., Oden, J.T. e Kikuchi, N. (1980b): **Analysis of Certain Unilateral Problems in von Kármán Plate Theory by a Penalty Method Part 2 : Approximation and Numerical Analysis**, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 24, 317-337.
- [63] Pandya, B.N. e Kant, T. (1988): **A Refined Higher Order Generally Orthotropic C° Plate Bending Element**, Comput. Structures, 28, No. 2, 119-133.
- [64] Peric, D. e Owen, R.J. (1992): **Computational Model for 3D Contact Problems with Friction Based on the Penalty Method**, Int. J. Num. Meth. Eng., 35, 1289-1309.
- [65] Pian, T.H.H. e Tong, P. (1987): **Mixed and Hybrid Finite-Element Methods**, em "Finite Element Handbook", Part 2, "FEM Fundamentals", H. Kardestuncer, Cap. 5, McGraw-Hill Book Company.
- [66] Pica, A., Wood, R.D. e Hinton, E. (1980): **Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Plate Behavior Using a Mindlin Formulation**, Comput. Structures, 11, 203-215.
- [67] Piltner, R. (1992): **A Quadrilateral Hybrid-Trefftz Plate Bending Element for the Inclusion of Warping Based on a Three Dimensional Plate Formulation**, Int. J. Num. Meth. Eng., 33, 387-408.
- [68] Powell, G. e Simons, J. (1981): **Improved Iteration Strategy for Non-Linear Structures**, Int. J. Num. Meth. Eng., 17, 1455-1467.
- [69] Pugh, E.D.L., Hinton, E. e Zienkiewicz, O.C. (1978): **A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with 'Reduced'**, Int. J. Num. Meth. Eng., 12, 1059-1079.

- [70] Reddy, J.N. (1984): **A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates**, J. Appl. Mech., 51, 745-752.
- [71] Reddy, J.N. (1984): **A Refined Non-Linear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation**, Int. J. Solids Structures, 20, No. 9/10, 881-896.
- [72] Reissner, E. (1945): **The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates**, J. Appl. Mech., 12, A69-A77.
- [73] Reissner, E. (1947): **On Bending of Elastic Plates**, Quart. Appl. Math., 5, 55-68.
- [74] Reissner, E. (1975): **On Transverse Bending of Plates, Including the Effect of Transverse Shear Deformation**, Int. J. Solids Structures, 11, No. 11, 569-573.
- [75] Reissner, E. (1976): **On the Theory of Transverse Bending of Elastic Plates**, Int. J. Solids Structures, 12, 545-554.
- [76] Reissner, E. (1981): **A Note on Bending of Plates Including the Effects of Transverse Shearing and Normal Strains**, ZAMP, n. 32, p. 764-767.
- [77] Riks, E. (1972): **The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability**, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 39, 1060-1065.
- [78] Riks, E. (1979): **An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems**, Int. J. Solids Structures, 15, 529-551.
- [79] Riks, E. (1984): **Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Non-Linear Structures**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 47, 219-259.
- [80] Rothert, H., Idelberger, H., Jacobi, W. e Niemann, L. (1985): **On Geometrically Non-Linear Contact Problems with Friction**, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 51, 139-155.
- [81] Selke, C.A.C. (1986): **Local Unilateral Contact Problems of Beams and Plates Undergoing Large Deflections**, Ph.D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor.

- [82] Selke, C.A.C. e Kikuchi, N. (1987): **Local Unilateral Contact Problems in Beams Using a Higher Order Theory**, COBEM 87 - IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, Dezembro/1987, Vol. II, 551-554.
- [83] Signorini, A. (1933): **Sopra Alcune Questioni di Elastostatica**, Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, 143-148.
- [84] Simo, J.C. e Laursen, T.A. (1992): **An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction**, Comput. Structures, 42, No. 1, 97-116.
- [85] Simo, J.C., Wriggers, P. e Taylor, R.L. (1985): **A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems**, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 48, No. 2, 193-203.
- [86] Simo, J.C., Wriggers, P., Schweizerhof, K.H. e Taylor, R.L. (1986): **Finite Deformation Post-Buckling Analysis Involving Inelasticity and Contact Constraints**, Int. J. Num. Meth. Eng., 23, 779-800.
- [87] Smith, R.A. e Palazotto, A.N. (1993): **Comparison of Eight Variations of a Higher Order Theory for Cylindrical Shells**, AIAA Jornal, 31, No. 6, 1125-1132.
- [88] Spencer, A.J.M. (1980): **Continuum Mechanics**, Logman, New York.
- [89] Stein, E. e Wriggers, P. (1984): **Stability of Rods with Unilateral Constraints, a Finite Element Solution**, Comput. Structures, 9, No. 1/2, 205-211.
- [90] Tessler, A. e Saether, E. (1991): **A Computationally Viable Higher Order Theory for Laminated Composite Plates**, Int. J. Num. Meth. Eng., 31, 1069-1086.
- [91] Tseng, Y.P. e Wang, W.J. (1993): **A Refined Finite Strip Method Using Higher Order**, Int. J. Solids Structures, 30, No. 3, 441-452.
- [92] Timoshenko, S. e Woinowsky-Krieger, S. (1959): **Theory of Plates and Shells**, 2<sup>nd</sup> Edition, McGraw-Hill, New York.

- [93] Torigaki, T. (1989): **Contact and Impact Problems Using Adaptive Finite Element Methods**, Ph.D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor.
- [94] Washizu, K. (1982): **Variational Methods in Elasticity and Plasticity**, 3rd Edition, Pergamon Press, Oxford.
- [95] Whitney, J.M. e Sun, C.T. (1973): **A Higher Order Theory for Extensional Motion of Laminated Composites**, J. Sound Vib., 30, 85-97.
- [96] Whitney, J.M. e Sun, C.T. (1974): **A Refined Theory for Laminated Anisotropic, Cylindrical Shells**, J. Appl. Mech., 41, No. 2, Trans. ASME, 471-476.
- [97] Wong, L.B. e Belitschko, T. (1987): **Assumed Strain Stabilization Procedure for the 9-node Lagrange Plane and Plate Elements**, Eng. Comput., 4, 229-239.
- [98] Zienkiewicz, O.C. (1977): **The Finite Element Method**, 3rd Edition, McGraw-Hill, Inc., New York.
- [99] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. e Too, J.M. (1971): **Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells**, Int. J. Num. Meth. Engng., 3, 275-290.

# APÊNDICE A

## Componentes da Matriz de Rigidez e do Vetor Carga para um Elemento Finito de Placa Utilizando a Teoria de Lo, Christensen e Wu

Este apêndice lista as componentes da matriz de rigidez e do vetor carga da equação de elementos finitos

$$[K_{\alpha l \gamma j}] \{\Delta u_{\gamma j}\} = \{\Delta f_{\alpha l}\}$$

para o elemento finito de placa sujeita a grandes deslocamentos e contato unilateral baseado na Teoria de Lo, Christensen e Wu (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977a), obtidos através da formulação Lagrangeana Atualizada.

As componentes da matriz de rigidez  $[K_{\alpha l \gamma j}]$  são dadas por (SELKE, 1986)

$$K_{\alpha l \gamma j}^{u_\alpha u_\gamma} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^1 [D_{\beta \alpha \gamma \phi}^0 + \sigma_{\phi \beta}^0 \delta_{\alpha \gamma}] N_{J,\phi}^1 \right\} dS_e + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^1 H_{\alpha \gamma}^0 N_J^1) d\Gamma_e \quad (A.1)$$

$$K_{\alpha l z j}^{u_\alpha w} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^1 [D_{\beta \alpha \phi z}^0] N_{J,\phi}^2 \right\} dS_e + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^1 H_{\alpha z}^0 N_J^2) d\Gamma_e \quad (A.2)$$

$$K_{\alpha l \gamma j}^{u_\alpha \theta_\gamma} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^1 \left[ D_{\beta \alpha \gamma z}^0 + \sigma_{\beta z}^0 \delta_{\alpha \gamma} \right] N_J^3 + N_{I,\beta}^1 \left[ \sigma_{\phi \beta}^1 \delta_{\alpha \gamma} \right] N_{J,\phi}^3 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^1 H_{\alpha \gamma}^1 N_J^3) d\Gamma_e \quad (A.3)$$

$$K_{\alpha l z j}^{u_\alpha \theta_z} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^1 \left[ D_{\beta \alpha z z}^0 \right] N_J^4 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^1 H_{\alpha z}^1 N_J^4) d\Gamma_e \quad (A.4)$$

$$K_{\alpha l \gamma j}^{u_\alpha u_\gamma^*} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^1 \left[ 2\sigma_{\beta z}^1 \delta_{\alpha \gamma} \right] N_J^5 + N_{I,\beta}^1 \left[ D_{\beta \alpha \gamma \phi}^2 + \sigma_{\phi \beta}^2 \delta_{\alpha \gamma} \right] N_{J,\phi}^5 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^1 H_{\alpha \gamma}^2 N_J^5) d\Gamma_e \quad (A.5)$$

$$K_{\alpha l z j}^{u_\alpha w^*} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^1 \left[ D_{\beta \alpha \phi z}^2 \right] N_{J,\phi}^6 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^1 H_{\alpha z}^2 N_J^6) d\Gamma_e \quad (A.6)$$

$$K_{\alpha l \gamma j}^{u_\alpha \theta_\gamma^*} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^1 \left[ 3D_{\beta \alpha \gamma z}^2 + 3\sigma_{\beta z}^2 \delta_{\alpha \gamma} \right] N_J^7 + N_{I,\beta}^1 \left[ \sigma_{\phi \beta}^3 \delta_{\alpha \gamma} \right] N_{J,\phi}^7 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^1 H_{\alpha \gamma}^3 N_J^7) d\Gamma_e \quad (A.7)$$

$$K_{z l z j}^{w w} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^2 \left[ D_{\beta z \phi z}^0 + \sigma_{\phi \beta}^0 \right] N_{J,\phi}^2 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^2 H_{zz}^0 N_J^2) d\Gamma_e \quad (A.8)$$



$$K_{zlyj}^{w\theta_\gamma} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^2 [D_{\beta\gamma z}^0] N_J^3 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^2 H_{z\gamma}^1 N_J^3) d\Gamma_e \quad (A.9)$$

$$K_{zljz}^{w\theta_z} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^2 [D_{\beta z z z}^0 + \sigma_{\beta z}^0] N_J^4 + N_{I,\beta}^2 [\sigma_{\phi\beta}^1] N_{J,\phi}^4 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^2 H_{zz}^1 N_J^4) d\Gamma_e \quad (A.10)$$

$$K_{zlyj}^{wu_\gamma} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^2 [D_{\beta\gamma\phi}^2] N_{J,\phi}^5 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^2 H_{z\gamma}^2 N_J^5) d\Gamma_e \quad (A.11)$$

$$K_{zljz}^{ww} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^2 [2\sigma_{\beta z}^1] N_J^6 + N_{I,\beta}^2 [D_{\beta z\phi z}^2 + \sigma_{\phi\beta}^2] N_{J,\phi}^6 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^2 H_{zz}^2 N_J^6) d\Gamma_e \quad (A.12)$$

$$K_{zlyj}^{w\theta_\gamma} = \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^2 [3D_{\beta\gamma z}^2] N_J^7 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^2 H_{z\gamma}^3 N_J^7) d\Gamma_e \quad (A.13)$$

$$K_{\alpha lyj}^{\theta_\alpha \theta_\gamma} = \int_{S_e} \left\{ N_I^3 [D_{\alpha\gamma z}^0 + \sigma_{zz}^0 \delta_{\alpha\gamma}] N_J^3 + N_I^3 [\sigma_{z\phi}^1 \delta_{\alpha\gamma}] N_{J,\phi}^3 + \right. \\ \left. + N_{I,\beta}^3 [\sigma_{\beta z}^1 \delta_{\alpha\gamma}] N_J^3 + N_{I,\beta}^3 [D_{\beta\alpha\gamma\phi}^2 + \sigma_{\phi\beta}^2 \delta_{\alpha\gamma}] N_{J,\phi}^3 \right\} dS_e + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^3 H_{\alpha\gamma}^2 N_J^3) d\Gamma_e \quad (A.14)$$

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha I z J}^{\theta_{\alpha} \theta_z} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^3 [D_{\alpha z z z}^0] N_J^4 + N_{I,\beta}^3 [D_{\beta \alpha \phi z}^2] N_{J,\phi}^4 \right\} dS_e + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^3 H_{\alpha z}^2 N_J^4) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_{\alpha} u_{\gamma}^*} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^3 [2\sigma_{zz}^1 \delta_{\alpha \gamma}] N_J^5 + N_I^3 [D_{\alpha z \gamma \phi}^2 + \sigma_{z\phi}^2 \delta_{\alpha \gamma}] N_{J,\phi}^5 + \right. \\
 &+ N_{I,\beta}^3 [2D_{\beta \alpha \gamma z}^2 + 2\sigma_{\beta z}^2 \delta_{\alpha \gamma}] N_J^5 + N_{I,\beta}^3 [\sigma_{\phi \beta}^3 \delta_{\alpha \gamma}] N_{J,\phi}^5 \left. \right\} dS_e + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^3 H_{\alpha \gamma}^3 N_J^5) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha I z J}^{\theta_{\alpha} w^*} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^3 [D_{\alpha z \phi z}^2] N_{J,\phi}^6 + N_{I,\beta}^3 [2D_{\beta \alpha z z}^2] N_J^6 \right\} dS_e + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^3 H_{\alpha z}^3 N_J^6) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha I \gamma J}^{\theta_{\alpha} \theta_{\gamma}^*} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^3 [3D_{\alpha z \gamma z}^2 + 3\sigma_{zz}^2 \delta_{\alpha \gamma}] N_J^7 + N_I^3 [\sigma_{z\phi}^3 \delta_{\alpha \gamma}] N_{J,\phi}^7 + \right. \\
 &+ N_{I,\beta}^3 [3\sigma_{\beta z}^3 \delta_{\alpha \gamma}] N_J^7 + N_{I,\beta}^3 [D_{\beta \alpha \gamma \phi}^4 + \sigma_{\phi \beta}^4 \delta_{\alpha \gamma}] N_{J,\phi}^7 \left. \right\} dS_e + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^3 H_{\alpha \gamma}^4 N_J^7) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
 K_{zIzJ}^{\theta_z\theta_z} = & \int_{S_e} \left\{ N_I^4 [D_{zzzz}^0 + \sigma_{zz}^0] N_J^4 + N_I^4 [\sigma_{z\phi}^1] N_{J,\phi}^4 + \right. \\
 & + N_{I,\beta}^4 [\sigma_{\beta z}^1] N_J^4 + N_{I,\beta}^4 [D_{\beta z\phi z}^2 + \sigma_{\phi\beta}^2] N_{J,\phi}^4 \left. \right\} dS_e + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^4 H_{zz}^2 N_J^4) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
 K_{zI\gamma J}^{\theta_z u_\gamma^*} = & \int_{S_e} \left\{ N_I^4 [D_{zz\gamma\phi}^2] N_{J,\phi}^5 + N_{I,\beta}^4 [2D_{\beta z\gamma z}^2] N_J^5 \right\} dS_e + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^4 H_{z\gamma}^3 N_J^5) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
 K_{zIzJ}^{\theta_z w^*} = & \int_{S_e} \left\{ N_I^4 [2\sigma_{zz}^1] N_J^6 + N_I^4 [D_{zz\phi z}^2 + \sigma_{z\phi}^2] N_{J,\phi}^6 + \right. \\
 & + N_{I,\beta}^4 [2D_{\beta zzz}^2 + 2\sigma_{\beta z}^2] N_J^6 + N_{I,\beta}^4 [\sigma_{\phi\beta}^3] N_{J,\phi}^6 \left. \right\} dS_e + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^4 H_{zz}^3 N_J^6) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
 K_{zI\gamma J}^{\theta_z \theta_\gamma^*} = & \int_{S_e} \left\{ N_I^4 [3D_{zz\gamma z}^2] N_J^7 + N_{I,\beta}^4 [D_{\beta z\gamma\phi}^4] N_{J,\phi}^7 \right\} dS_e + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^4 H_{z\gamma}^4 N_J^7) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha\gamma\beta}^{u_\alpha^* u_\gamma^*} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^5 \left[ 4D_{\alpha\gamma\beta}^2 + 4\sigma_{zz}^2 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_J^5 + N_I^5 \left[ 2\sigma_{z\phi}^3 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_{J,\phi}^5 + \right. \\
 &+ N_{I,\beta}^5 \left[ 2\sigma_{\beta z}^3 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_J^5 + N_{I,\beta}^5 \left[ D_{\beta\alpha\gamma\phi}^4 + \sigma_{\phi\beta}^4 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_{J,\phi}^5 \left. \right\} dS_e + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^5 H_{\alpha\gamma}^4 N_J^5) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha\beta\gamma}^{u_\alpha^* w_\beta^*} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^5 \left[ 4D_{\alpha\beta\gamma}^2 \right] N_J^6 + N_{I,\beta}^5 \left[ D_{\beta\alpha\phi z}^4 \right] N_{J,\phi}^6 \right\} dS_e + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^5 H_{\alpha\beta}^4 N_J^6) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha\gamma\beta}^{u_\alpha^* \theta_\gamma^*} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^5 \left[ 6\sigma_{zz}^3 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_J^7 + N_I^5 \left[ 2D_{\alpha\gamma\beta\phi}^4 + 2\sigma_{z\phi}^4 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_{J,\phi}^7 + \right. \\
 &+ N_{I,\beta}^5 \left[ 3D_{\beta\alpha\gamma z}^4 + 3\sigma_{\beta z}^4 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_J^7 + N_{I,\beta}^5 \left[ \sigma_{\phi\beta}^5 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_{J,\phi}^7 \left. \right\} dS_e + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^5 H_{\alpha\gamma}^5 N_J^7) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha\beta\gamma}^{w_\alpha^* w_\beta^*} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^6 \left[ 4D_{\alpha\beta\gamma}^2 + 4\sigma_{zz}^2 \right] N_J^6 + N_I^6 \left[ 2\sigma_{z\phi}^3 \right] N_{J,\phi}^6 + \right. \\
 &+ N_{I,\beta}^6 \left[ 2\sigma_{\beta z}^3 \right] N_J^6 + N_{I,\beta}^6 \left[ D_{\beta\alpha\phi z}^4 + \sigma_{\phi\beta}^4 \right] N_{J,\phi}^6 \left. \right\} dS_e + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} (N_I^6 H_{\alpha\beta}^4 N_J^6) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned}
 K_{zlyj}^{w\theta_y^*} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^6 \left[ 2D_{zz\gamma\phi}^4 \right] N_{J,\phi}^7 + N_{I,\beta}^6 \left[ 3D_{\beta z\gamma z}^4 \right] N_J^7 \right\} dS_e + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} \left( N_I^6 H_{zy}^5 N_J^7 \right) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha l \gamma j}^{\theta_\alpha^* \theta_\gamma^*} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^7 \left[ 9D_{\alpha z \gamma z}^4 + 9\sigma_{zz}^4 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_J^7 + N_I^7 \left[ 3\sigma_{z\phi}^5 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_{J,\phi}^7 + \right. \\
 &+ N_{I,\beta}^7 \left[ 3\sigma_{\beta z}^5 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_J^7 + N_{I,\beta}^7 \left[ D_{\beta\alpha\gamma\phi}^6 + \sigma_{\phi\beta}^6 \delta_{\alpha\gamma} \right] N_{J,\phi}^7 \left. \right\} dS_e + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{C_e}} \left( N_I^7 H_{\alpha\gamma}^6 N_J^7 \right) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

e as componentes do vetor carga  $\{\Delta f_{\alpha l}\}$  são dadas por (SELKE, 1986)

$$\begin{aligned}
 \Delta f_{q_{\alpha l}} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^1 (\Delta q_\alpha + q_\alpha) \right\} dS_e + \int_{l_e} \left\{ N_I^1 (\Delta t_{q_\alpha}^F + t_{q_\alpha}^F) \right\} dl_e - \\
 &- \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^1 \sigma_{\beta\alpha}^0 \right\} dS_e + \int_{\Gamma_{C_e}} \left\{ N_I^1 \left[ \frac{1}{\varepsilon} J_\alpha^0 + I_\alpha^0 \right] \right\} d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta f_{q_{zl}} &= \int_{S_e} \left\{ N_I^2 (\Delta q_z + q_z) \right\} dS_e + \int_{l_e} \left\{ N_I^2 (\Delta t_{q_z}^F + t_{q_z}^F) \right\} dl_e - \\
 &- \int_{S_e} \left\{ N_{I,\beta}^2 \sigma_{\beta\alpha}^0 \right\} dS_e + \int_{\Gamma_{C_e}} \left\{ N_I^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon} J_z^0 + I_z^0 \right] \right\} d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned} \Delta f_{m_{\alpha l}} = & \int_{S_e} \{N_I^3(\Delta m_{\alpha} + m_{\alpha})\} dS_e + \int_{l_e} \{N_I^3(\Delta t_{m_{\alpha}}^F + t_{m_{\alpha}}^F)\} dl_e - \\ & - \int_{S_e} \{N_{I,\beta}^3 \sigma_{\beta\alpha}^1 + N_I^3 \sigma_{\alpha z}^0\} dS_e + \int_{\Gamma_{C_e}} \left\{ N_I^3 \left[ \frac{1}{\epsilon} J_{\alpha}^1 + I_{\alpha}^1 \right] \right\} d\Gamma_e \end{aligned} \quad (A.31)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_{m_{zl}} = & \int_{S_e} \{N_I^4(\Delta m_z + m_z)\} dS_e + \int_{l_e} \{N_I^4(\Delta t_{m_z}^F + t_{m_z}^F)\} dl_e - \\ & - \int_{S_e} \{N_{I,\beta}^4 \sigma_{\beta z}^1 + N_I^4 \sigma_{zz}^0\} dS_e + \int_{\Gamma_{C_e}} \left\{ N_I^4 \left[ \frac{1}{\epsilon} J_z^1 + I_z^1 \right] \right\} d\Gamma_e \end{aligned} \quad (A.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_{n_{\alpha l}} = & \int_{S_e} \{N_I^5(\Delta n_{\alpha} + n_{\alpha})\} dS_e + \int_{l_e} \{N_I^5(\Delta t_{n_{\alpha}}^F + t_{n_{\alpha}}^F)\} dl_e - \\ & - \int_{S_e} \{N_{I,\beta}^5 \sigma_{\beta\alpha}^2 + N_I^5 2\sigma_{\alpha z}^1\} dS_e + \int_{\Gamma_{C_e}} \left\{ N_I^5 \left[ \frac{1}{\epsilon} J_{\alpha}^2 + I_{\alpha}^2 \right] \right\} d\Gamma_e \end{aligned} \quad (A.33)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_{n_{zl}} = & \int_{S_e} \{N_I^6(\Delta n_z + n_z)\} dS_e + \int_{l_e} \{N_I^6(\Delta t_{n_z}^F + t_{n_z}^F)\} dl_e - \\ & - \int_{S_e} \{N_{I,\beta}^6 \sigma_{\beta z}^2 + N_I^6 2\sigma_{zz}^1\} dS_e + \int_{\Gamma_{C_e}} \left\{ N_I^6 \left[ \frac{1}{\epsilon} J_z^2 + I_z^2 \right] \right\} d\Gamma_e \end{aligned} \quad (A.34)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_{l_{\alpha l}} = & \int_{S_e} \{N_I^7(\Delta l_{\alpha} + l_{\alpha})\} dS_e + \int_{l_e} \{N_I^7(\Delta t_{l_{\alpha}}^F + t_{l_{\alpha}}^F)\} dl_e - \\ & - \int_{S_e} \{N_{I,\beta}^7 \sigma_{\beta\alpha}^3 + N_I^7 3\sigma_{\alpha z}^2\} dS_e + \int_{\Gamma_{C_e}} \left\{ N_I^7 \left[ \frac{1}{\epsilon} J_{\alpha}^3 + I_{\alpha}^3 \right] \right\} d\Gamma_e \end{aligned} \quad (A.35)$$

onde as quantidades relacionadas com os carregamentos aplicados são definidos como

$$\{\Delta q_\alpha \quad \Delta m_\alpha \quad \Delta n_\alpha \quad \Delta l_\alpha\}^T = \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta b_\alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \end{Bmatrix} dz \quad (A.36)$$

$$\{\Delta q_z \quad \Delta m_z \quad \Delta n_z\}^T = \int_{-h/2}^{+h/2} \Delta b_z \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (A.37)$$

e os valores de  $q_\alpha$ ,  $q_z$ ,  $m_\alpha$ ,  $m_z$ ,  $n_\alpha$ ,  $n_z$  e  $l_\alpha$  são acumulativos em cada incremento das quantidades acima.